Практические занятия по теории вероятностей
3 курс «Математика» МКН
V семестр, осень 2020

Содержание

1 Материалы занятий **2**

Занятие 1, 03.09.2020. Геометрическая вероятность. Случайные величины. Функции распределения. . . . 2

Занятие 2, 10.09.2020. Функции распределения. Совместные распределения. . . . 4

Занятие 3, 17.09.2020. Совместные распределения. Матожидание. . . . 5

Занятие 4, 24.09.2020. Функции распределения. Матожидание. Разные задачи. . . . 6

Занятие 5, 01.10.2020. Моменты с.в. Характеристические функции. . . . 7

Занятие 6, 08.10.2020. Характеристические функции. . . . 8

Занятие 7, 15.10.2020. Характеристические функции. Сходимости с.в. . . . 9

Занятие 8, 22.10.2020. Сходимости с.в. . . . 10

Занятие 9, 12.11.2020. Сходимости с.в. . . . 11

Занятие 10, 12.11.2020. Условные матожидания (примеры для дискретных и непрерывных с.в.) 12

Занятие 11, 19.11.2020. Условные матожидания (общий случай) . . . 14

Занятие 12, 26.11.2020. Условные матожидания (свойства) . . . 15

Занятие 13, 10.12.2020. Игра «Абака» . . . 16

2 Листочки **18**

Листочек 1 по теории вероятностей. Дедлайн: 09.10.2020, 23:59 . . . 18

Листочек 2 по теории вероятностей. Дедлайн: 29.11.2020, 23:59 . . . 19

3 Контрольные работы **20**

Контрольная работа 1 по теории вероятностей, 29.10.2020 . . . 20

Контрольная работа 2 по теории вероятностей, 17.12.2020 . . . 20

Лектор: М.А. Лифшиц. Преподаватели практики: Ю.А. Давыдов, М.В. Платонова, Ю.П. Петрова.

1 Материалы занятий

Занятие 1, 03.09.2020. Геометрическая вероятность. Случайные величины. Функции распределения.

1. Внутри правильного n-угольника случайным образом выбрана точка. Какое событие более вероятно: точка ближе к центру, чем к какой-либо другой вершине, или наоборот?

2. **Парадокс Бертрана.** В окружности радиуса R случайным образом проводится хорда. Найдите вероятность того, что длина хорды больше R.
   Hint: ответ зависит от точной формализации понятия "случайный выбор". Возможны, например, такие варианты:

   А) два конца хорды выбираются равномерно на окружности

   Б) середина хорды распределена равномерно в круге

   В) середина хорды равномерна распределена на диаметре, перпендикулярном ее направлению

   Г*) прямая, на которой лежит хорда, определяется среди прямых, пересекающих окружность, в соответствии с инвариантной мерой пространства прямых на плоскости.

3. Из отрезка $[0,1]$ случайным образом выбирают число. Какова вероятность того, что в десятичной записи этого числа будет хотя бы один нуль?

4. В куб $[0,1]^n$ случайно брошена точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вероятность того, что точка x принадлежит измеримому подмножеству куба, равна лебеговой мере этого подмножества. Найдите вероятности того, что

   А) $\max_j x_j < z$,

   Б) $\min_j x_j < z$.

   В) Найдите предельное значение величины $P(n \cdot \min_j x_j < z)$ при $n \to \infty$.

5. А) На окружности в $\mathbb{R}^2$ случайно выбраны 3 точки. Какова вероятность, что образованный ими треугольник содержит центр окружности?

   Б) На сфере в $\mathbb{R}^3$ выбираем случайно 4 точки. Какова вероятность, что симплекс, натянутый на эти точки, содержит центр сферы?

Случайные величины. Функции распределения.

Определение: Пусть X — случайная величина. Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная равенством:

$$F(x) = \mathbb{P}\{X \leqslant x\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

называется *функцией распределения* случайной величины X.

1. Пусть F — функция распределения случайной величины X.

   А) Выразите $\mathbb{P}\{X = a\}$ через значения функции F.

   Б) Выразите $\mathbb{P}\{X \in [a,b)\}$ через значения функции F.

2. Пусть F — функция распределения для с.в. X, а F_Y — функция распределения для с.в. $Y = aX+b$ (a, b — константы). Выразите F_Y через F.

3. Предположим, что $\mathbb{P}\{X = 0\} = 0$, а $Y = \frac{1}{X}$. выразите F_Y через F.

4. Случайная величина X такова, что $aX \overset{\mathcal{D}}{=} bX$ (по распределению) для некоторых констант a, b, причем $a \neq b$. Докажите, что $X = 0$ п.н.

5. Случайная величина X имеет функцию распределения F, которая непрерывна. Что можно сказать о распределении случайной величины $Y = F(X)$?

6. Доказать, что для любой функции распределения F и для любой константы $a \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}} [F(x+a) - F(x)]\, dx = a.$$

Доп задачи на геометрическую вероятность.

1. Пусть 3 точки независимо выбраны на окружности.

   А) Независимы ли события "угол $\angle ABC$ острый" и "угол $\angle ACB$ острый"?

   Б) С какой вероятностью треугольник ABC будет остроугольным? А прямоугольным?

2. **Неравенство Бонферрони.** Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — события. Докажите неравенство

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(E_i \cap E_j).$$

3. **Игла Бюффона.** Иглу длины l бросают на лист бумаги.

   А) С какой вероятностью она пересечет сетку параллельных прямых, расположенных на расстоянии a друг от друга?

   Б) Как этот результат можно использовать для оценивания числа π?

   В*) С какой вероятностью игла не пересечет квадратную сетку со стороной квадрата a?

4. **Составляем треугольник.**

   А) На отрезок $[0, 1]$ наудачу брошены три точки a, b, c. Найдите вероятность того, что их отрезков $[0, a]$, $[0, b]$, $[0, c]$ можно составить треугольник.

   Б) Стержень сломан в двух случайно выбранных точках. Какова вероятность того, что из трех образованных отрезков можно сложить треугольник?

   В*) Стержень сломан в случайной точке, а затем больший из полученных отрезков снова сломан в случайной точке. Найдите вероятность того, что из трех образованных отрезков можно сложить треугольник.

5. Пусть точка x выбрана случайно на единичной сфере в пространстве $\mathbb{R}^3$. Какова вероятность того, что $|x_1| > z$?

Занятие 2, 10.09.2020. Функции распределения. Совместные распределения.

1. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0,1]$. Найти плотность распределения случайной величины ξ^2.

2. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} ce^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ фиксировано, а c – некоторая константа.

   А) Найти c.

   Б) Найти $P\{1 \leqslant \xi \leqslant 2\}$.

3. Найти плотность случайной величины e^Y, где

   А) Y – стандартная гауссовская случайная величина.

   Б) Y имеет экспоненциальное распределение с параметром 1.

4. Совместное распределение величин X и Y имеет плотность

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}, & x^2+y^2 \geqslant 1, \\ 0, & x^2+y^2 < 1. \end{cases}$$

   А) Независимы ли X и Y?

   Б) Найти плотность случайной величины $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

5. X и Y – независимые случайные величины с одинаковым экспоненциальным распределением. Доказать, что случайные величины $U = \min(X,Y)$ и $V = X - Y$ независимы.

6. X и Y – две ограниченные случайные величины такие, что

$$\mathbf{E}\,(X^m Y^n) = \mathbf{E}\,X^m\,\mathbf{E}\,Y^n$$

для любых натуральных m и n. Доказать, то X и Y – независимы.

Для желающих

7. Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, распределенные экспоненциально с интенсивностью 1. Докажите, что случайные величины

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}, \quad Y_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}, \quad Y_3 = X_1+X_2+X_3$$

независимы.

Занятие 3, 17.09.2020. Совместные распределения. Матожидание.

0. *Разминка:* Пусть X и Y случайные величины на одном вероятностном пространстве и распределения случайных величин $X+Y$ и X совпадают.

   А) Следует ли отсюда, что $Y = 0$ п.н. в общем случае?

   Б) Следует ли отсюда, что $Y = 0$ п.н., если предположить, что $Y \geqslant 0$ п.н.?

1. Две ограниченные с.в. X и Y таковы, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$. Доказать, что X и Y одинаково распределены.

2. С.в. X и Y независимы и имеют стандартное гауссовское распределение. Пусть $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < \sqrt{x^2}$ Найдите $\mathbb{P}\{(X,Y) \in K\}$.

3. С.в. X и Y независимы и имеют стандартное гауссовское распределение. Найдите распределение вектора $(X-Y, X+Y)$.

4. Случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение на границе квадрата $[0,1]^2$. Найдите распределение с.в. X.

5. С.в. X с вероятностью 1 принимает значения из $\mathbb{R}_+$. F — ее функция распределения.

   А) Доказать, что $\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx$

   Б) Найти аналог предыдущей формулы для произвольной интегрируемой с.в.

6. Автобус приезжает на остановку в случайное время, распределенное экспоненциально с интенсивностью один, начиная с 12 часов ночи. Вася пришел на остановку к 12 ночи. Каково распределение времени ожидания автобуса Васей при условии, что Вася ждет автобуса уже час?

7. Какова мощность множества всех функций распределения?

8. С.в. X и Y имеют одинаковое распределение и $X \geqslant 0$ с вероятностью 1. Верно ли, что

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)?$$

Замечание: с.в. — случайная величина.

Занятие 4, 24.09.2020. Функции распределения. Матожидание. Разные задачи.

1. Доказать, что если $\mathbb{E}\,|X|^\alpha < \infty$ для некоторого $\alpha > 0$, то $\mathbb{E}\,|X|^\beta < \infty$ для любого $\beta \in (0, \alpha]$.

2. Случайные величины $\xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены: $\xi_k = 0$ или 1 с равными вероятностями. Пусть
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}.$$
   А) Найти распределение случайной величины S_n.
   Б) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\{a \leqslant S_n \leqslant b\}$.

3. Доказать, что $\mathbb{E}\,X$ существует тогда и только тогда, когда существует $\mathbb{E}\,[X]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

4. X и Y независимы и принимают целые неотрицательные значения и $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Докажите, что
$$\mathbb{E}\,\min(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X \geqslant k\}\mathbb{P}\{Y \geqslant k\}.$$

5. Пусть случайная величина X, имеющая непрерывную плотность распределения, принимает только значения из $[0, \pi]$, причем распределения случайных величин $\cos X$ и $\cos(2X)$ совпадают. Доказать, что распределение X равномерное на $[0, \pi]$.

6. Найти коэффициент корреляции между числом выпавших единиц и числом выпавших шестерок при n независимых бросаниях правильной игральной кости.

7. Случайная величина X интегрируема, а ее функция распределения $F(x)$ такова, что $F(0) = 0$. Доказать, что функция
$$G(x) = \prod_{n=1}^{\infty} F(x + n)$$
является функцией распределения.

8. На окружности радиуса a случайным образом и независимо друг от друга точки X_1 и X_2. Найдите среднюю длину полученного отрезка, т.е. $\mathbb{E}|X_1 - X_2|^2$.

9. На двух смежных гранях куба со стороной a выбраны случайным образом и независимо друг от друга точки X_1 и X_2. Найдите среднюю длину полученного отрезка, т.е. $\mathbb{E}|X_1 - X_2|^2$.

10. Пусть X, Y, Z — независимые с.в. с распределением $U[a, b]$.
   А) Найдите распределение с.в. $X + Y$.
   Б) Как будет выглядеть плотность с.в. $X + Y + Z$?

Занятие 5, 01.10.2020. Моменты с.в. Характеристические функции.

1. Постройте пример, показывающий, что из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость.

2. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы, $\mathbb{E}\xi_i = 0$, $\mathbb{E}|\xi_i|^3 < \infty$.

   А) Докажите, что
   $$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)^3 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i^3).$$

   Б) Предположим, что $\mathbb{E}|\xi_i|^4 < \infty$. Верно ли, что
   $$\mathbb{E}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)^4 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i^4).$$

3. Случайные величины независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Пусть
   $$\tau := \inf\{k | \xi_1 + \ldots + \xi_k \geqslant 1\}.$$
   Найти $\mathbb{E}\tau$.

4. Элементы матрицы $A = (\xi_{ij}$ независимые случайные величины, при этом $\mathbb{E}\xi_{ij} = 0$, $\mathbb{D}\xi_{ij} = \sigma^2$ для всех i, j. Найдите $\mathbb{E}\det(A)$ и $\mathbb{D}\det(A)$.

5. Являются ли характеристическими следующие функции? Если да, то укажите соответствующее распределение, если нет, то объясните, почему.

   А) $\sin(t)$ В) $\cos^5(t)$ Д) $\frac{1+e^{-it}}{2}$ Ж) e^{-t^4}

   Б) $1 + \sin(t)$ Г) e^{-t} Е) e^{-t^2}

6. Докажите, что если φ — характеристическая функция, то следующие функции также являются характеристическими:

   А) φ^2 Б) $|\varphi|^2$ В) $\mathrm{Re}\varphi$ Г) $\frac{2}{2-\varphi} - 1$ Д) $e^{\varphi-1}$

7. Случайная величина ξ имеет плотность, f — характеристическая функция случайной величины ξ. Докажите, что $|f(t)| < 1$ при $t \neq 0$.

Занятие 6, 08.10.2020. Характеристические функции.

1. Привести пример такой негауссовской случайной величины, для которой плотность $p(x)$ пропорциональна характеристической функции φ, то есть $p(x) = C\varphi(x)$.

2. Случайные величины $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайной величины
$$Y = \prod_{k=0}^{n} \xi_k.$$

3. Случайные величины X и Y имеют функции распределения F и G соответственно. Докажите, что
$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant \mathbf{P}\{X \neq Y\}.$$

4. Случайный вектор $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ имеет математическое ожидание $\mathbf{E}\bar{X} = (\mathbf{E}X_1, \ldots, \mathbf{E}X_d)$. Докажите, что
$$\|\mathbf{E}\bar{X}\| \leqslant \mathbf{E}\|X\|.$$

5. Известно, что $X = U(Y + Z)$, причем U равномерно распределена на $[0, 1]$, величины U, Y, Z независимы, а X, Y, Z одинаково распределены. Найти распределение X.

6. Пусть X – случайная величина с характеристической функцией $\varphi(t)$ и с конечным математическим ожиданием. Докажите, что
$$\mathbf{E}|X| = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re}\varphi(t)}{t^2}\, dt.$$

Занятие 7, 15.10.2020. Характеристические функции. Сходимости с.в.

1. А) Пусть $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$ и $X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ — гауссовские независимые с.в. Тогда

$$X_1 + X_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

   Б) Пусть $X_1 \sim \mathcal{P}(a_1)$ и $X_2 \sim \mathcal{P}(a_2)$ — пуассоновские независимые с.в. Тогда

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(a_1 + a_2)$$

2. Пусть случайные величины $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы, причем N принимает лишь натуральные значения, а величины X_j одинаково распределены. Выразите характеристическую функцию суммы случайного числа слагаемых

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j$$

   через характеристическую функцию X и производящую функцию N.

3. Пусть f — характеристическая функция. Верно ли, что $|f|$ — характеристическая функция?

4. Является ли характеристической функцией:

$$\text{А) } \varphi(x) = -2\frac{\cos(t) - 1}{t^2} \qquad \text{Б) } \varphi(x) = (-1)^{n+1}(2n+2)!\frac{\cos(t) - P_n(t)}{t^{2n+2}},$$

   где $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}/(2k)!$ — многочлен Тейлора для косинуса.

5. *Любопытный факт:* есть достаточное условие условие того, что функция характеристическая. Пусть функция $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

   А) Функция φ четна и непрерывна;

   Б) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$;

   В) Функция φ выпукла на $(0, \infty)$.

   Докажите, что φ — характеристическая функция некоторого распределения.

6. Пусть $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, а $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Доказать, что $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.

7. Для каких видом сходимости (почти наверно, по вероятности, в среднем и по распределению) сходимость по Чезаро следует из обычной сходимости?

8. Пусть X_j — последовательность независимых величин Бернулли с параметрами p_j. При каких условиях на p_j эта последовательность почти наверно сходится?

Занятие 8, 22.10.2020. Сходимости с.в.

1. Привести пример последовательности с.в., сходящейся с вероятностью 1 и такой что никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем порядка $p > 0$. Рассмотреть 2 случая: последовательность не сходится в среднем

   А) для некоторого $p > 0$.

   Б) для всех $p > 0$.

2. Одним из эквивалентных определений слабой сходимости распределений $\mathcal{P}_k \Rightarrow Q$ является

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{P}_n = \int_{\mathbb{R}} f dQ$$

   для любой непрерывной ограниченной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   А) Приведите пример вероятностных распределений $\mathcal{P}_k$ и Q и ограниченной функции f, таких что $\mathcal{P}_k \Rightarrow Q$, но не выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{P}_n = \int_{\mathbb{R}} f dQ$$

   Б) Приведите пример вероятностных распределений $\mathcal{P}_k$ и Q и непрерывной функции f, таких что $\mathcal{P}_k \Rightarrow Q$, но не выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f d\mathcal{P}_n = \int_{\mathbb{R}} f dQ$$

3. Известно, что $X_n \Rightarrow X$ и $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Доказать, что

   А) $X_n + Y_n \Rightarrow X$

   Б) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

4. С.в. $\{\xi_n\}$ таковы, что для некоторого $p > 0$ $\sum_n \mathbb{E}|\xi_n|^p < \infty$. Доказать, что $\xi_n \to 0$ п.н.

Занятие 9, 12.11.2020. Сходимости с.в.

1. Доказать, что существует квадратная матрица A порядка 11, у которой все элементы равны 1, либо -1 и $\det(A) > 4000$.

2. Случайная величина X имеет плотность $p(x) = |x| \cdot 1_{[-1,1]}(x)$. Доказать, что X нельзя представить в виде суммы двух независимых одинаково распределенных случайных величин.

3. Расстояние Леви $\rho_L(F, G)$ между двумя функциями распределения F и G определяется как точная нижняя грань тех $h \geqslant 0$, для которых при всех $x \in \mathbb{R}^1$

$$F(x-h) - h \leqslant G(x) \leqslant F(x+h) + h,$$
$$G(x-h) - h \leqslant F(x) \leqslant G(x+h) + h$$

   Доказать, что $F_n \Rightarrow F$ тогда и только тогда, когда $\rho_L(F_n, F) \to 0$.

4. Докажите, что $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ b $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — непрерывная функция. Доказать, что

$$f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X, Y).$$

5. Случайные величины X_k независимы, $\mathbb{P}\{X_k = 1\} = p$ и $\mathbb{P}\{X_k = -1\} = 1-p$. Найдите все значения параметра $\alpha > 0$, при которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} X_k$ сходится п.н.

6. Случайные величины X_k независимы, $\mathbb{P}\{X_k = 1\} = p$ и $\mathbb{P}\{X_k = -1\} = 1 - p$. Пусть

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{если } X_k = 1 \text{ и } X_{k+1} = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   Верно ли, что $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \to \mathbb{E} Y_1$ по вероятности? А п.н.?

Занятие 10, 12.11.2020. Условные матожидания (примеры для дискретных и непрерывных с.в.)

Дискретные с.в.

Давайте сначала рассмотрим случай дискретных с.в. Пусть A и B — события, причем $\mathbb{P}(B) > 0$, X, Y — дискретные с.в., причем $\mathbb{P}(Y = y) > 0$. Будем использовать такие обозначения:

$$\mathbb{P}(A|B), \qquad p_{X|B}(k) = \mathbb{P}(X = k|B), \qquad \mathbb{E}[X|B],$$
$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y) \qquad \mathbb{E}[X|Y = y]$$

Очень полезен следующий факт (докажите!):
пусть вероятностное пространство $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, причем $\mathbb{P}(B_i) > 0$. Тогда

$$p_X(k) = \sum_{i=1}^{n} p_{X|B_i}(k)\mathbb{P}(B_i) \qquad \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|B_i]\mathbb{P}(B_i)$$

Аналогичный факт в терминах с.в. X и Y:

$$p_X(x) = \sum_{y} p_{X|Y}(x|y)p_Y(y) \qquad \mathbb{E}[X] = \sum_{y} \mathbb{E}[X|Y = y]p_Y(y)$$

1. Пусть X — с.в. принимающая значения 0 или 1, Y — принимает значения 0, 1 или 2. Исходно у нас есть частичная информация о совместном распределении:

X , Y	0	1	2
0			
1	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$

Также нам известно:

- При условии, что $X = 1$ с.в. Y равномерно распределена
- $p_{X|Y}(0|0) = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{E}[Y|X = 0] = \frac{4}{5}$

Используя эту информацию, заполните пустые клеточки.

Непрерывные с.в.

Пусть теперь X, Y — абс. непр. с.в. У нас проблема, т.к. $\mathbb{P}(Y = y) = 0$! Как же определить условные вероятности?
Определение: пусть $p_{X,Y}(x, y)$ — плотность совместного распределения с.в. X и Y. Условной плотностью X при условии $Y = y$ будем называть

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \qquad p_Y(y) > 0$$

Проверьте, что это действительно плотность. Естественным образом определяются условные вероятности и условные матожидания:

$$\mathbb{P}(X \in A|Y = y) = \int_A p_{X|Y}(x|y)\,dx \qquad \mathbb{E}[g(X)|Y = y] = \int_{\mathbb{R}} g(x)p_{X|Y}(x|y)\,dx$$

2. Пусть X, Y имеют совместное непрерывное распределение. Докажите, что

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X|Y}(x, y)p_Y(y)\,dy \qquad \mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(X)|Y = y]p_Y(y)\,dy$$

3. Пусть (X, Y) равномерно распределен на треугольнике D с вершинами в точках $(1, 0)$, $(2, 0)$ и $(0, 1)$. Найдите условную плотность $p_{X|Y}(x|y)$ и условное матожидание $\mathbb{E}[X|Y = y]$.

4. Пусть Y — стандартная нормальная с.в. И пусть X — другая нормальная с.в. с дисперсией 1 и матожиданием, равным Y, который только что пронаблюдали.

   А) Найдите совместную функцию распределения вектора (X, Y).

   Б) Пусть мы пронаблюдали $X = x$. Как теперь распределен Y?

Условные матожидания как случайные величины

Для любого фиксированного y мы уже научились определять *число* $\mathbb{E}[X|Y=y]$. А давайте теперь посмотрим на это как на *функцию* от y, т.е. $v(y)=\mathbb{E}[X|Y=y]$. Тогда функция $v(Y)$ и есть условное матожидание от X при данном Y есть уже сама по себе случайная величина!
Определение: пусть X и Y дискретные или совместно непрерывные с.в. Условным матожиданием от X при условии Y будем называть с.в. $v(Y)$, где $v(y)=\mathbb{E}[X|Y=y]$, и обозначать $\mathbb{E}[X|Y]$.

5. Совместное распределение X и Y задано табличкой ниже. Найдите с.в. $\mathbb{E}[X|Y]$.

X , Y	0	1
0	3/10	2/10
1	1/10	4/10

6. У условных МО есть ряд интересных свойств. Давайте их докажем:

   А) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]=\mathbb{E}[X]$.

   Б) $\mathbb{E}[aX+b|Y]=a\mathbb{E}[X|Y]+b$

   В) $\mathbb{E}[g_1(X_1)+\ldots+g_n(X_n)|Y]=\mathbb{E}[g_1(X_1)|Y]+\ldots+\mathbb{E}[g_n(X_n)|Y]$.

   В следующих задачах применение условного матожидания может упростить расчет:

7. Вы держите в руках палочку длины 1. К вам подходит друг и отламывает кусочек палочки в случайном месте ($\sim U[0,1]$). Теперь у вас в руке остался кусочек палочки длины Y. Ваша подруга подходит и ломает кусок палочки в случайном месте (равномерно распределенном по оставшейся длине палочки). И у вас осталась палочка длины X. Найдите плотность X, матожидание $\mathbb{E}X$ и дисперсию $\mathbb{D}X$.

8. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — iid Bernoulli с вероятность. успеха p, и $S_k=X_1+\ldots+X_k$. Найдите условное МО $\mathbb{E}[S_m|S_n]$, $m<n$.

А вот и еще замечательный факт: С.в. X и Y независимы iff $p_{X|Y}(x|y)=p_X(x)$.

9. А) Покажите, что если X, Y независимые, то $\mathbb{E}(g(X)|Y)=\mathbb{E}[g(X)]$. Заметим, что это уже постоянная величина.

   Б) В противоположность пункту А покажите, что $\mathbb{E}[g(X)|X]=g(X)$. В частности, верно такое равенство: $\mathbb{E}[X|X]=X$.

10. Пусть X и Y независимые с.в., $Y\sim U[0,1]$, а X имеет плотность $f_X(x)$.
    Покажите, что дробная часть $\{X+Y\}\sim U[0,1]$.
    Замечание: здесь $\{x\}=z-\lfloor z\rfloor$, где $\lfloor z\rfloor$ — наибольшее целое число, не меньшее z.

Занятие 11, 19.11.2020. Условные матожидания (общий случай)

Пусть у нас определено вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. В прошлый раз мы с Вами определяли условные МО отдельно для дискретных, отдельно для непрерывных с.в. Но все-таки хочется иметь единое определение. Поэтому

Определение 1. *Будем называть условным матожиданием с.в. X относительно сигма-алгебры $\mathcal{M}$ (и обозначать $\mathbb{E}(X|\mathcal{M})$ или $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}X$) такую с.в., которая:*

1. *$\mathcal{M}$-измерима*
2. *для любого $A \in \mathcal{M}$ выполнено:*

$$\int\limits_A \mathbb{E}(X|\mathcal{M})\, d\mathbb{P} = \int\limits_A X\, d\mathbb{P}$$

Определение 2. *Будем называть условным матожиданием с.в. X относительно с.в. Y (и обозначать $\mathbb{E}(X|Y)$) с.в. $\mathbb{E}(X|\sigma(Y))$, где $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$ — сигма-алгебра, порожденная с.в. Y.*

На лекциях вам докажут, что с.в. $\mathbb{E}(X|\mathcal{M})$ существует и единственна с точностью до п.н.

1. Чему равно $\mathbb{E}(X|\mathcal{M})$, если $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$?
2. Поймите, что верны следующие свойства:
   А) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{M})) = \mathbb{E}X$
   Б) $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(aX + bY) = a\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(X) + b\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(Y)$
   В) (телескопическое свойство или свойство проекции): если $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, то
   $$\mathbb{E}_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{E}_{\mathcal{M}_2}(X)) = \mathbb{E}_{\mathcal{M}_1}X \qquad\qquad \mathbb{E}_{\mathcal{M}_2}(\mathbb{E}_{\mathcal{M}_1}(X)) = \mathbb{E}_{\mathcal{M}_1}X$$
3. А) Пусть (X, Y) — случайный вектор с плотностью совместного распределения равной $p(x, y)$. Тогда $\mathbb{E}(X|Y) = f(Y)$, где
   $$f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \frac{p(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} p(z, x)\, dz}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} x p_{X|Y}(x|y)\, dx$$
   и $p_{X|Y}(x|y)$ — плотность условного распределения с.в. X при условии $Y = y$ (определяли в прошлый раз)
   Б) В терминах п.А найдите $\mathbb{E}(h(X)|Y)$, т.е. выразите через плотность $p(x, y)$. Также найдите $\mathbb{E}(h(X, Y)|Y)$.
4. Пусть $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mathbb{P} = \lambda$ — мера Лебега. Найдите $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}X$, если
   А) $\mathcal{M}$ — σ-алгебра всех множеств, симметричных относительно точки $1/2$.
   Б) $\mathcal{M}$ — σ-алгебра, порожденная множествами $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$.
   В) $\mathcal{M} = \sigma(Y)$, где $Y(\omega) = \min\{2\omega, 1\}$
5. С.в. X принимает не более n значений. Верно ли, что $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}X$ тоже принимает не более n значений?
6. Если $X_n \to X$ в L_p при $p \geqslant 1$, то и $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(X_n) \to \mathbb{E}_{\mathcal{M}}(X)$ в L_p.
7. С.в. (X, Y) имеет гауссовское распределение с $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ и с матрицей ковариации
   $$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \\ \rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$
   Найдите $\mathbb{E}(X|Y)$.

Занятие 12, 26.11.2020. Условные матожидания (свойства)

Пусть у нас определено вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Буква $\mathcal{M}$ всегда обозначает подсигма-алгебру.

1. (УМО как ортогональный проектор)
   Рассмотрим $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ — подсигма-алгебра, $L_2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P}) \subset L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда

   $$\mathbb{E}_{\mathcal{M}} X = \sqcap_{\mathcal{M}} X,$$

   где $\sqcap_{\mathcal{M}} : L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to L_2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$ — оператор ортогонального проектирования. Т.е. осознайте (!!!) 2 свойства

   А) $\mathbb{E}_{\mathcal{M}} X \in L_2(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{P})$

   Б) $(X - \mathbb{E}_{\mathcal{M}} X)$ ортогонально индикатору любого множества $B \in \mathcal{M}$ (а значит и любой функции, измеримой относительно $\mathcal{M}$).

2. (УМО как лучшее предсказание)
   Пусть мы хотим узнать с.в. X, но не умеем ее наблюдать напрямую. Все, что мы знаем, это другая с.в. Y (скажем, неточное измерение X из-за случайного шума). Как лучше всего оценить X в терминах Y? Оценка X через Y — это всегда некоторая функция $h(Y)$. Будем оценивать эффективность оценки через *среднее квадратичное отклонение* $\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right]$. Тогда

   $$\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right] \geqslant \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|Y])^2\right]$$

3. А) Пусть $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots$ — iid, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Пусть N — неотрицательная целочисленная с.в., независимая с X, $\mathbb{E}[N] < \infty$. Определим *случайную сумму* $S_N = X_1 + \ldots + X_N$. Тогда

   $$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1] \qquad\qquad \text{[тождество Вальда]}$$

   N.B.: заметим, что если N — с.в., то

   $$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] \neq \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[X_k]$$

   Б) Придумайте контрпример к тождеству Вальда в случае, если N и X_i зависимые.

4. С.в. X и Y таковы, что $X,\ X \cdot Y \in L_1$. Если Y — $\mathcal{M}$ измерима, то $\mathbb{E}_{\mathcal{M}}(X \cdot Y) = Y \cdot \mathbb{E}_{\mathcal{M}} X$.
   N.B.: в более общем виде можно написать так (для таких функций a и b, для которых равенство определено)

   $$\mathbb{E}[a(X)b(Y)|Y] = b(Y) \cdot \mathbb{E}[a(X)|Y]$$

   Благодаря УМО по Y, мы смогли вытащить $b(Y)$ из-под МО. Т.е. беря УМО по Y, мы обращаемся с $b(Y)$, как будто это константа.

5. С.в. X_n независимы, а Y такова, что $\mathbb{E}Y = a$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Докажите, что

   $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y|X_k) \xrightarrow{\mathbb{P}} a$$

Занятие 13, 10.12.2020. Игра «Абака»

Тема 1: сходимости

1. **[10]** Найдите предел:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n}\frac{x_1^5+\ldots+x_n^5}{x_1^4+\ldots+x_n^4}\,dx.$$

2. **[20]** Пусть X_n случайный вектор в $\mathbb{R}^n$, имеющий стандартное гауссовское распределение. Обозначим через $B(r)$ замкнутый шар радиуса r с центром в нуле. Доказать, что для любого $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{X_n}{\sqrt{n}}\in B(1+\varepsilon)\setminus B(1-\varepsilon)\Big\}\to 1.$$

P.S. Фактически задача говорит, что при больших n гауссовский вектор сосредоточен на сфере радиуса $\sqrt{n}$ (и на самом деле, хорошо приближает равномерное распределение на сфере). Это сильно помогает в решении задачи 8 из Листочка 2!

Тема 2: Ветвящиеся процессы

В популяции первоначально имеется одна частица: $Z(0)=1$. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число потомков ξ в соответствии с производящей функцией числа потомков

$$f(s)=r+(1-r)\frac{q}{1-ps},\quad r\in[0,1),\quad p+q=1.$$

Каждая из новорожденных частиц также имеет единичную продолжительность жизни и в конце ее производит (независимо от остальных частиц) случайное число потомков в соответствии с производящей функцией $f(s)$. Таким образом, при $n>0$

$$Z(n+1)=\xi_1^{(n)}+\ldots+\xi_{Z(n)}^{(n)},$$

где $\xi_i^{(n)}$ – число потомков i-й частицы n-го поколения ($i=1,2,...,Z(n)$), причем $\xi_i^{(n)}\overset{d}{=}\xi$ при всех $i=1,2,...$ и $n=0,1,2,...$ и независимы.

Предположим, что $f'(1)=1$, это означает, что процесс является критическим.

1. **[10]** Докажите, что при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{Z_n>0\}=\frac{q}{np}(1+o(1)).$$

2. **[20]** Для любого $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\frac{qZ_n}{np}\leqslant x\Big|Z_n>0\Big\}=1-e^{-x}.$$

Тема 3: вероятностный подход

1. **[10]** Пусть $a_{ij}=\pm1$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. Докажите, что существуют такие $x_i,y_i=\pm1$, что

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j\geqslant\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+o(1)\right)\cdot n^{3/2}.$$

Интересна интерпретация этого утверждения: пусть у нас есть $n\times n$ фонарей, и каждый из них может быть либо «включен» ($a_{ij}=+1$), либо «выключен» ($a_{ij}=-1$). Пусть для каждого ряда по горизонтали или по вертикали есть свой переключатель такой, что если переключатель включен ($x_i=-1$ для ряда i или $y_j=-1$ для столбца j), то все фонари в этом ряду или столбце меняют свое состояние: «включен» $\Rightarrow$ «выключен» и наоборот. Тогда для любой начальной конфигурации включенных фонарей можно поставить переключатели так, что количество включенных фонарей минус количество выключенных хотя бы $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}+o(1)\right)\cdot n^{3/2}$.

2. **[20]** Пусть $C \subset \mathbb{R}^d$ и $B(x) = [0, x]^d$. Упаковкой C в $B(x)$ будем называть совокупность непересекающихся копий C, лежащих внутри $B(x)$. Пусть $f(x)$ наибольшее количество элементов упаковки для данного x. Определим $\delta(C)$ — максимальную долю пространства, которую можно занять копиями C, а именно:
$$\delta(C) = \mu(C) \lim_{x\to\infty} f(x)x^{-d},$$
где $\mu(C)$ — мера Лебега C. Пусть C — ограниченное, выпуклое, центрально-симметричное тело. Докажите, что
$$\delta(C) \geqslant 2^{-d-1}.$$

Общая схема Абаки

	тема 1	тема 2	тема 3
простая задача	10 баллов	10 баллов	10 баллов
сложная задача	20 баллов	20 баллов	20 баллов

- Если решите все задачи из одной темы, то получаете дополнительно +15 баллов
- Если решите все простые задачи, то получаете дополнительно +15 баллов
- Если решите все сложные задачи, то получаете дополнительно +30 баллов
- За любую дополнительную задачу можно получить +30 баллов

Дополнительные задачи (для тех, кому и так все понятно)

Тема 1: сходимости

3. **[30]** Пусть $\{X_n\}$ такая последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним, что $\sum\limits_n \mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Докажите что ряд $\sum\limits_n X_n$ сходится почти наверное.

Тема 2: Ветвящиеся процессы

3. **[30]** Рассмотрим критический процесс Гальтона-Ватсона с произвольной производящей функцией $\varphi(s)$, удовлетворяющей следующим условиям
$$\varphi'(1) = 1, \quad \varphi''(1) < \infty.$$
Докажите, что при $n \to \infty$
$$\mathbf{P}\{Z_n > 0\} = \frac{2}{n\varphi''(1)}(1 + o(1)).$$
и для любого $x > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\frac{2Z_n}{n\varphi''(1)} \leqslant x \Big| Z_n > 0\Big\} = 1 - e^{-x}.$$

Тема 3: вероятностный подход

3. **[30]** Докажите, что любое множество целых ненулевых чисел B, $|B| = n$, содержит свободное от сумм подмножество A такое, что $|A| > n/3$.
Определение: множество A называется свободным от сумм, если $(A+A) \cap A = \emptyset$, т.е. ни для каких трех элементов a_1, a_2, a_3 не выполнено, что $a_1 + a_2 = a_3$.

2 Листочки

Листочек 1 по теории вероятностей. Дедлайн: 09.10.2020, 23:59

(В квадратных скобках указаны баллы за задачи)

1. **[2]** Случайная величина X имеет равномерное распределение на [0,10]. Найдите распределение случайной величины $Y = ||X-1|-2|$.

2. **[2]** Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет сферически симметричное распределение. Докажите, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ попарно некоррелированы.

   Напоминание: вероятностное распределение в $\mathbb{R}^n$ называется сферически симметричным, если оно инвариантно относительно поворотов вокруг нуля.

3. **[2]** Случайные величины X, Y, Z независимы в совокупности, причем X и Y имеют стандартное гауссовское распределение, а случайная величина Z принимает целочисленные значения, $Z \in \mathbb{Z}$. Найдите плотность распределения случайной величины
$$\frac{X + ZY}{\sqrt{1+Z^2}}.$$

4. **[2]** Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют одинаковое экспоненциальное распределение. Докажите, что случайные величины
$$\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{и} \qquad X_1 + \frac{X_2}{2} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$
одинаковы распределены.

5. **[4]** Пусть f — липшицева функция на прямой с нормой не более единицы (т.е. $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$). Докажите неравенство
$$\mathbb{D}f(\xi) \leqslant \mathbb{D}\xi$$
   Напоминание: здесь $\mathbb{D}X$ — это дисперсия случайной величины X, т.е. $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

6. **[4]** Пусть X — неотрицательная случайная величина. Докажите неравенство:
$$\mathbb{E}X^4\mathbb{E}X^8 \leqslant \mathbb{E}X^3\mathbb{E}X^9$$

7. **[4]** Случайные величины X, Y независимы, причем Y имеет симметричное распределение. Доказать, что для любого $p \in [1, 2]$ выполнено неравенство
$$\mathbb{E}|X+Y|^p \leqslant \mathbb{E}|X|^p + \mathbb{E}|Y|^p$$

Организационные моменты:

- Решение задач нужно оформлять письменно с подробным объяснением всех переходов.
- Можно писать от руки (главное, чтобы было читабельно!), на планшете или в LaTeX. Оформление в LaTeX будет поощряться дополнительными баллами.
- Решение задач присылается один раз на почту mariyaplat@gmail.com.
- Важно: все решения нужно присылать единым файлом PDF. Для удобства стандартизируем название файла: MKN-list1-N-Surname.pdf, где N — номер группы (1,2 или 3), Surname — Ваша фамилия. Например, MKN-list1-3-Filippov.pdf.
- Дедлайн: 9 октября 2020, 23:59.

Листочек 2 по теории вероятностей. Дедлайн: 29.11.2020, 23:59

1) **[2]** Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ центрированы, $\mathbb{E}X_k^2 \leqslant B$ для любого k, $\mathbb{E}X_kX_j \to 0$ равномерно при $|k-j| \to \infty$. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Доказать, что $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ означает, что случайные величины X_n сходятся к X по вероятности.)

2) **[2]** Вычислите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n \text{ раз}} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} d\,x_1 \ldots d\,x_n.$$

3) **[2]** Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Доказать, что для любого $b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n \leqslant b\}$$

существует и равен или 0, или 1, или $\frac{1}{2}$.

4) **[2]** Пусть (X, Y) равномерно распределен в квадрате $[0,1]^2$. Найти $\mathbb{E}\left(X + Y \middle| X - Y\right)$.

5) **[4]** Пусть X, Y – независимые случайные величины с экспоненциальным распределением с параметром 1, а функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$. Найти формулу для условного математического ожидания $\mathbb{E}\left(f(X,Y)\middle| X+Y\right)$.

6) **[4]** Найти $\mathbb{E}\left(X\middle|\, |X|\right)$, в предположении, что X имеет плотность $p(x)$.

7) **[4]** Известно, что $X_n \Rightarrow X$ и $\mathbb{E}\,|X_n| \to \mathbb{E}\,|X|$. Доказать, что для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\,|X_n + a| \to \mathbb{E}\,|X + a|.$$

($X_n \Rightarrow X$ означает, что распределения $\mathcal{P}_{X_n}$ слабо сходятся к $\mathcal{P}_X$.)

Бонусные задачи:

8) **[5]** Пусть $X^n = \left(X_1^n, X_2^n, \ldots, X_{n+1}^n\right)$ случайный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$, равномерно распределенный на единичной сфере. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}X_{n+1}^n \leqslant x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

9) **[5]** Докажите, что если $\mathbb{E}\left(X\middle| Y\right) \geqslant Y$ и $\mathbb{E}\left(Y\middle| X\right) \geqslant X$, то $X = Y$ почти наверное.

3 Контрольные работы

Контрольная работа 1 по теории вероятностей, 29.10.2020

1. Плотность совместного распределения $p_{\xi,\eta}(x, y)$ величин ξ и η равна

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Найти константу C, одномерные плотности распределения $p_\xi(x)$, $p_\eta(y)$ величин ξ и η, плотность распределения величины $\zeta = \max(\xi, \eta)$.

2. Две точки брошены на прямую независимо, координата каждой из них распределена как $\mathcal{N}(0, 1)$. Найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

3. Функция $\varphi(t)$ определена равенством

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kt), \quad a_k,\, b_k \in \mathbb{R},$$

   причем не все константы b_k нулевые. Может ли φ быть характеристической функцией?

4. Случайная величина X такова, что $\mathbb{E}|X|^{2n+1} < \infty$ для некоторого $n \geqslant 0$. Доказать, что существует a, такое что $\mathbb{E}(X - a)^{2n+1} = 0$; при этом такое a единственно.

Контрольная работа 2 по теории вероятностей, 17.12.2020

1. Пусть $f(t)$ — 2π-периодическая функция, причем на отрезке $[0, 2\pi]$ она совпадает с графиком квадратного трехчлена и $f(0) = 1$. Определите, при каких $f(\pi)$ функция f является характеристической функцией некоторого распределения и найдите это распределение.

2. Пусть случайные величины (X_n) — совместно гауссовские и $X_n \to X$ п.н. Доказать, что $X_n \xrightarrow{L_2} X$.

3. Пусть (X_n) — последовательность случайных величин. Вероятностное свойство Коши заключается в том, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n : \quad \forall m_1, m_2 > n \qquad \mathbb{P}(|X_{m_1} - X_{m_2}| > \varepsilon) < \varepsilon.$$

   Докажите, что если $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, то (X_n) имеет свойство Коши.
   Верно ли обратное, т.е. если (X_n) имеет свойство Коши, то $\exists X : X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$?

4. Пусть случайный вектор (X, Y) распределен равномерно на круге $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Найдите $\mathbb{E}(Y^2|X)$.