Практические занятия по математическому анализу
2 курс «Современное программирование»
III семестр, осень 2019

Содержание

1 Материалы занятий

Занятие 1, 03.09.19. Непрерывность функций нескольких переменных

Def: функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если для любой последовательности $x_n \to x_0$ выполнено $f(x_n) \to f(x_0)$. При $n = 1$ имеется всего 2 направления («слева» и «справа»), откуда можно подойти к точке x_0. При $n \geqslant 2$ таких направлений становится бесконечно много (и это делает двумерную жизнь намного интереснее)!

1. Базовый пример: $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

   А) Поймите, что при любом фиксированном x функция непрерывна как функция от y (наоборот тоже верно).

   Б) Верно ли, что функция непрерывна как функция двух переменных x и y в точке $(5, 2)$? В точке $(0, 0)$?

2. Приведите пример функции $f(x, y)$, у которой:

   А) существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$, но не равны друг другу;

   Б) существуют пределы $f(x, y)$ вдоль каждой прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, равные друг другу, но функция не непрерывна в точке $(0, 0)$. Т.е. функция может быть непрерывна вдоль любой прямой, проходящей через начало координат, но не быть непрерывной как функция двух переменных;

   В) покажите, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x, и липшицева по переменной y (т.е. существует константа $L > 0$: $|f(x, y) - f(x, y_0)| < L|y - y_0|$), то она непрерывна.

3. Найдите пределы: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$ и $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ равна:

   А) $\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$; Б) $(1 + xy)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; В) $(1 + xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}$.

4. Приведите пример многочлена $p(x, y)$, который везде положителен, но его $\inf = 0$.

Дифференцируемость функций нескольких переменных

Def: частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x в точке (x^0, y^0) называют предел:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) := f'_x(x^0, y^0) := \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x^0 + \Delta x, y^0) - f(x^0, y^0)}{\Delta x}.$$

Фактически фиксируются все остальные переменные и берется обычная одномерная производная.

5. Найдите частные производные функции f в точке $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, если

   А) $f(x, y) = (x + 1)(y + 1)\exp(\sin(x) + \sin(y))$

   Б) $f(x, y) = (1 + \sin^2 x)^{\log(1+y)}$

   В) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1x_2 \cdot \dots \cdot x_n|$

   Г) $f(x_1, \dots, x_n) = \int_1^2 \log(t + x_1) \cdot \log(t + x_2) \cdot \dots \cdot \log(t + x_n)\, dt$

6. Найдите частные производные функции $u(x, y)$ в точке p, если

   А) $u^3(x, y) + 3xyu(x, y) + 1 = 0, \quad p = (0, 1)$ Б) $e^{u(x,y)} - xyu(x, y) - 2 = 0, \quad p = (1, 0)$

Def: функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке (x^0, y^0), если существуют числа A и B:

$$f(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) - f(x^0, y^0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

Если функция f дифференцируема, то существуют частные производные, причем $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)$ и $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)$.

7. Дифференцируемы ли следующие функции в точке 0:

   А) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

   Б) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$

   В) $f(x, y) = \arctan(1 + x^{4/5}y^{2/7})$

   Г) $f(x, y) = \frac{\log((1+xy)/(1-xy))-2xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

   Д) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

   Е) $f(x, y) = \int_0^x \cos(\sqrt[3]{y^2t})\, dt$

   Ж) $f(x) = \sum\limits_{n>0} \frac{\sin(2^n x)}{n^2}$

   З) $f(x) = \sum\limits_{n>0} \frac{\sin(n^2 x)}{2^n}$

8. SL_n — это «поверхность» в $\mathbb{R}^{n^2}$, состоящая из всех матриц $n \times n$ с определителем 1. Опишите касательную гиперплоскость к этой поверхности в точке E_n (единичная матрица).

Def: Правило дифференцирования сложной функции (chain rule, правило цепочки):
пусть $f = f(u, v)$, а $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

9. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и известно, что $f(x, x^2) \equiv 1$ и $f_1'(x, x^2) = x$. Найдите $f_2'(x, x^2)$.

Занятие 2, 10.09.19. Дифференцирование сложной и неявной функции

Def: Правило дифференцирования сложной функции (chain rule, правило цепочки):
пусть $f = f(u, v)$, а $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{или более компактно} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

1. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и известно, что $f(x, x^2) \equiv 1$ и $f_1'(x, x^2) = x$. Найдите $f_2'(x, x^2)$.
2. Докажите, что $\Delta P(x + iy) = 0$ для всякого полинома P.
   Rmk: функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, для которой $\Delta(f) = 0$, называется *гармонической.*
3. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется однородной степени d, если $f(tx) = t^d f(x)$ для любых $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что f — однородна степени d тогда и только тогда, когда выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d \cdot f(x) \qquad \text{для всякого } x \in \mathbb{R}^n$$

Дифференцирование неявно заданных функций.

Пусть $F(x, y, z) = 0$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3)$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) функция z может быть представлена как функция от x, y, т.е. $z = z(x, y)$. Как найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$?
Алгоритм такой: пишем $F(x, y, z(x, y)) = 0$ и дифференцируем как сложную функцию:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

4. А) Пусть $F(x, z) = 0$, причем $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z_0) \neq 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0$. Это означает, что в некоторой окрестности точки (x_0, z_0) существует явное выражение $x = x(z)$ и $z = z(x)$. Чему равно $\dfrac{dz}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dz}$?
   Б) Пусть $F(x, y, z) = 0$, причем $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Это означает, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) существует явное выражение $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ и $z = z(x, y)$. Верно ли, что $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = 1$?
   В) При выполненных условиях пункта Б, чему равно $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$?
5. Найдите частные производные функции $u(x, y)$ (и функции $v(x, y)$) в точке (x_0, y_0), если

$$\text{А) } e^{u(x,y)} - xyu(x, y) - 2 = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 0); \qquad \text{Б) } \begin{cases} xu + yv - u^3 = 0, \\ x + y + u + v = 0; \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (1, 0), u(x_0, y_0) = 1$$

Не перепутайте! Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция (скажем, класса $C^2(\mathbb{R}^n)$).

- $\nabla f := \mathrm{grad}(f) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ — градиент (вектор частных производных)
- $\Delta(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа (Лапласиан)

Занятие 3, 17.09.19. Формула Тейлора и поиск локальных экстремумов

Немного про формулу Тейлора: если $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, то в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ имеет место разложение:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2 + o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)$$

или в матричной записи:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\dots)$$

1. Найдите разложение по формуле Тейлора в точке (x_0, y_0) до $o((\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^d)$:

   А) $2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, $(x_0,y_0) = (1,-2)$, $d = \infty$ Б) $\sin(x)\operatorname{sh}(y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $d = 5$

2. Пусть $f(x_1,\dots,x_4) \in C^{100}(\mathbb{R}^4)$. Найдите коэффициент в разложении функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке $(0,0,0,0)$ при $x_1^{10}x_2^{35}x_3^{43}x_4^{12}$.

Алгоритм нахождения локальных экстремумов

Есть простой алгоритм нахождения экстремумов функции $f(x,y)$:
Шаг 1: в точке локального экстремума (x_0,y_0) должны выполняться равенства $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

Шаг 2: смотрим на матрицу Гессе (матрица вторых производных): $H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$.

- Если матрцица $H(f)$ положительно определена в точке (x_0,y_0), то (x_0,y_0) — точка локального минимума.
- Если матрица $H(f)$ отрицательно определена в точке (x_0,y_0), то (x_0,y_0) — точка локального максимума.
- Если матрица не определена в точке (x_0,y_0), то (x_0,y_0) не является точкой локального экстремума.

Для проверки знакоопредленности матрицы Гессе полезно пользоваться критерием Сильвестра.

3. Исследуйте следующие функции на экстремумы:

   А) $f = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$
   Б) $f = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$
   В) $f = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$
   Г) $f = x^4 + y^4 - 2x^2$
   Д) $f = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$
   Е) $f = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$
   Ж) $f = x^2 + xy + y^2 - 4\log x - 10\log y$
   З) $f = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном множестве

   А) $x^4 - y^4, \quad x^2 + y^2 \le 2$
   Б) $(x+y)e^{xy}, \quad -2 \le x + y \le 1$

5. Является ли точка $(0,0)$ точкой экстремума функции

   А) $f = x^2 - 2xy + y^2 - 3x^3 + 2x^2y + x^4$ Б) $f = \cos x + \cos(y^2) - \cos(x + y^2)$

6. Исследуйте функцию $u = u(x,y)$ на экстремум, если

   А) $x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0,\ u > 2$ Б) $(x^2 + y^2 + u^2)^2 = 8(x^2 + y^2 - u^2),\ u > 0$

7. Исследуйте следующие функции на экстремумы:

   А) $f = x_1 x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^n \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} k x_k\right)$ Б) $f = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k},\ x_0 = a > 0,\ x_{n+1} = b > 0$

Занятие 4, 24.09.19. Экстремумы и условные экстремумы: метод множителей Лагранжа

1. Исследуйте следующие функции на экстремумы:

   А) $f = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$

   Б) $f = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$

   В) $f = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

   Г) $f = x^4 + y^4 - 2x^2$

   Д) $f = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$

   Е) $f = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$

2. Является ли точка $(0, 0)$ точкой экстремума функции

   А) $f = x^2 - 2xy + y^2 - 3x^3 + 2x^2y + x^4$

   Б) $f = \cos x + \cos(y^2) - \cos(x + y^2)$

3. (задача о том, как работает метод множителей Лагранжа) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция и $L \subset \mathbb{R}^n$ — гиперплоскость, заданная уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$. Рассмотрим сужение f на L и предположим, что $f|_L$ имеет экстремум в точке $x \in L$. Выведите отсюда, что $\nabla f(x) \parallel (a_1, a_2, \dots, a_n)$, то есть найдется λ такое, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lambda a_i$. Что можно сказать в случае, когда $L = \{x \mid \varphi(x) = 0\}$, где φ — какая-то гладкая функция?

Условные экстремумы

Пусть мы хотим найти экстремумы функции $f(x_1, \dots, x_n)$ при дополнительных условиях $g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, $k = 1, \dots, m$ (уравнения связи, ограничения). Для этого работает следующий алгоритм:

1) Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n),$$

где $\lambda_k \in \mathbb{R}$ — множители Лагранжа.

2) (проверка необходимых условий локального экстремума):
Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, & i = 1, \dots, n \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, & k = 1, \dots, m \end{cases} \tag{1}$$

Все решения системы (1) — это подозрительные точки на локальный экстремум (но могут таковыми не являться).

3) (проверка достаточных условий условного локального минимума/максимума)
Подробнее см. Кудрявцев, том 3, Глава 1, §5.

4. Базовые примеры: найдите локальные экстремумы функции f при заданном условии связи:

   А) $f = x^2 + y^2, \quad x + y = 1$

   Б) $f = 6 - 5x - 4y, \quad x^2 - y^2 = 9$

   В) $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, a_i > 0$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном множестве

   А) $x^4 - y^4, \quad x^2 + y^2 \le 2$

   Б) $(x + y)e^{xy}, \quad -2 \le x + y \le 1$

   В) $x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz, \quad x + y + z = 1, 0 \leqslant x, y, z \leqslant \frac{1}{2}$

6. Используя условные экстремумы, докажите нервенство о средних:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Hint: для доказательства неравенства вида $g(x) \leqslant f(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, можно поступить следующим образом:

$$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad C \leqslant f(x), \quad x \in A \quad \text{и} \quad g(x) = C$$

т.е. достаточно доказать, что $\min\limits_{x \in A} f(x) \geqslant C$ при условии $g(x) = C$, т.е. найти условный экстремум.

7. В геометрии часто возникают задачи на минимизацию: поиск расстояния между кривыми или поверхностями, нахождение геодезических. Например: найдите расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y - x - 5 = 0$.

Занятие 5, 01.10.19. Экстремумы и условные экстремумы: поиск наибольшего и наименьшего значения, доказательство неравенств. Базовые примеры варицонного исчисления

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном множестве

   $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+4xyz, \quad x+y+z=1, 0 \leqslant x,y,z \leqslant \frac{1}{2}$

2. Используя условные экстремумы, докажите нервенство:

   А) о средних: $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

   Б) Гельдера: $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}, \ x_i, y_i \geq 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

   Hint: для доказательства неравенства вида $g(x) \leqslant f(x)$, $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, можно поступить следующим образом:

   $$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in A \qquad \Leftrightarrow \qquad C \leqslant f(x), \quad x \in A \quad \text{и} \quad g(x) = C$$

   т.е. достаточно доказать, что $\min\limits_{x \in A} f(x) \geqslant C$ при условии $g(x) = C$, т.е. найти условный экстремум.

Немного вариационного исчисления
(или поиск экстремумов в бесконечномерных пространствах)

Попробуем разобраться, как это работает. Докажем какой-нибудь итак всем понятный факт: например, что кратчайшая кривая между двумя точками — это прямая. Пусть $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция и $y(0)=0, y(1)=1$. Длина графика y задается

$$L(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx.$$

Мы хотели бы найти y при котором $L(y)$ будет минимальным.

3. Пусть $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция с компактным носителем. Покажите, что

$$\begin{aligned} L(y+\varepsilon h) &= L(y) + \varepsilon \int_0^1 \frac{y'(x)h'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\,dx + O(\varepsilon^2) \\ &= L(y) - \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)' \cdot h(x)\,dx + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

4. Выведите, что необходимым условием того, что y — минимум, является

$$\int_0^1 \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)' \cdot h(x)\,dx.$$

5. Попробуйте аргументировать, что это равносильно

$$\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)' \equiv 0,$$

   что в свою очередь влечет $y(x) = ax+b$.

А теперь чуть интереснее.

Теперь давайте попробуем решить какую-нибудь задачу, ответ для которой заранее неизвестен. Например, попробуем отыскать уравнение цепной линии. Между прочем, это было весьма нетривиально в свое время! Задача перед нами стоит следующая: есть веревочка, подвешенная на два гвоздика на стене. Получается график функции $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, причем $y(-1) = y(1) = a$. Длина веревочки фиксирована, то есть

$$L(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = l \text{ — fixed.}$$

Веревочка будет висеть таким образом, чтобы минимизировать потенциальную энергию, которая (с точностью до мультипликативной константы) равна

$$E(y) = \int_{-1}^{1} y\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

Нам нужно минимизировать $E(y)$ при условии $L(y) = l$.

1. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\Lambda(y) = E(y) - \lambda L(y) = \int_{-1}^{1} (y - \lambda)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} z(x)\sqrt{1 + z'(x)^2} = \Lambda(z),$$

где $z(x) = y(x) - \lambda$. Покажите, что

$$\Lambda(z + \varepsilon h) = \Lambda(z) + \varepsilon \cdot \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 + z'(x)^2} - \left(\frac{z(x)z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right)' \right) \cdot h(x)\, dx + O(\varepsilon^2).$$

2. Из условия, что z — минимум, мы получаем, что

$$\sqrt{1 + z'(x)^2} - \left(\frac{z(x)z'(x)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} \right)' = 0,$$

как и выше. Посокращайте, что посокращается, и преобразуйте это к виду

$$zz'' - (z')^2 - 1 = 0.$$

3. Проверьте, что уравнение выше влечет $\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{\sqrt{1+(z')^2}} \right) = 0$, то есть

$$\frac{z}{\sqrt{1 + (z')^2}} = c.$$

4. Преобразуйте предыдущее уравнение к виду

$$\frac{z'(x)}{\sqrt{\left(\frac{z(x)}{c}\right)^2 - 1}} = 1.$$

Проинтегрируйте обе части и получите, что $\operatorname{arcch}\left(\frac{z(x)}{c}\right) = \frac{x-d}{c}$, то есть

$$y(x) = c \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - d}{c}\right) + \lambda.$$

5. Вспомним, что $y(-1) = y(1) = a$ и $L(y) = l$. Найдите c, d и λ.

Теперь вы знаете, откуда взялся кошинус!

Занятие 6, 08.10.19. Экстремумы и условные экстремумы. Собственные числа матриц

1. Исследуйте следующие функции на условные экстремумы:

   А) $f = xy + 2xz + 2yz$ при условии $xyz = 108$

   Б) $f = x^2 - 4x + \frac{1}{2}y^2 - z^2$ при условии $x^2 + z^2 = y + 4$

2. Найдите $\sup f$ и $\inf f$ на указанном множестве:

   А) $f = x + 2y + 3z$ на множестве $x + y \leq 3$, $x + y \leq z$ $3x + 3y \geq z$, $x \geq 0$

Плоские квадрики.

Плоской квадрикой называется кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, задающаяся уравнением $P(x, y) = 0$, где $P \in \mathbb{R}[x, y]$ — многочлен степени два. К плоским квадрикам относятся, например,

А) эллипс: задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

Б) парабола: задается уравнением $x^2 + \frac{y}{a} = b$,

В) гипербола: задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$,

Г) вырожденная квадрика: прямая, объединение двух прямых или точка.

3. А) Пусть $P \in \mathbb{R}[x, y]$ — многочлен степени 2. Покажите, что существуют симметричная ненулевая матрица $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}$, вектор $b \in \mathbb{R}^2$ и число $c \in \mathbb{R}^2$, такие, что
$$P(x, y) = (x, y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x, y) \cdot b + c$$

   Б) Покажите, что список выше описывает все квадрики с точностью до движения.

4. Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *собственным числом* A, если существует $v \in \mathbb{R}^n$ такой, что $Av = \lambda v$. Такой вектор называется *собственным вектором* матрицы A. Собственные числа являются корнями характерестического многочлена матрицы:
$$P_A(x) = \det(A - x\mathrm{Id}).$$
Покажите, что $P_A(x)$ — многочлен степени n и λ — собственное число A тогда и только тогда, когда $P_A(\lambda) = 0$. Выведите отсюда, что каждая матрица $n \times n$ имеет не больше n собственных чисел.

5. Поскольку собственные числа — это корни многочлена, даже вещественную матрицу осмысленно рассматривать как оператор на $\mathbb{C}^n$ — ведь комплексным корням многочлена P_A будут соответствовать комплексные собственные вектора. Простой пример — это матрица
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
отвечающая повороту $\mathbb{R}^2$ на $\pi/2$. Очевидно, у A нет собственных векторов из $\mathbb{R}^2$. Найдите P_A и покажите, что вектор $v = (1, \pm i) \in \mathbb{C}^2$ является собственным вектором с собственным числом $\pm i$.

6. Пусть $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица $n \times n$.
Найдите максимум $f(x)$ при условии $\|x\| = 1$, если

   А) $a_{ij} = 1$

   Б) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$
   Hint: а какой ранг у этих матриц?

   В) $a_{ij} = i + j \mod n$
   NB: обратите внимание, что сумма элементов во всех строчках одинаковая.

Вопрос: помните, когда квадратичная форма достигает максимума на сфере? а? Правильно, надо найти максимальное собственное число.

7. Докажем формулу для чисел Фибоначчи. Числа Фибоначчи определяются следующим образом: $f_0 = f_1 = 1$ и $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   А) Покажите, что
$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1}. \end{pmatrix}$$

   Б) Найдите собственные числа λ_1, λ_2 и собственные векторы v_1, v_2 матрицы A. *Указание:* если λ — собственное число, то собтвенный вектор можно найти, решив систему $Av = \lambda v$.

   В) Заметим, что v_1, v_2 образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, можно написать $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2$. Воспользуйтесь тем, что $A^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = a\lambda_1^n v_1 + b\lambda_2^n v_2$ и выведите стандартную формулу для f_n в терминах золотого сечения.

Занятие 7, 15.10.19. Теория меры: мера Лебега, измеримые функции

Напомним несколько ключевых определений из теории меры.
Определение: пусть X — некоторое множество, а $\nu : 2^X \to [0, +\infty]$ — субмера, то есть

1. $\nu(\varnothing) = 0$
2. $A \subset B$ влечет $\nu(A) \le \nu(B)$ (монотонность)
3. $\nu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty})A_n\right) \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$ (счетная полуаддитивность).

Определение: множество $E \subset X$ называется измеримым относительно ν, если для всякого $A \subset X$

$$\nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \nu(A).$$

Множество всех ν-измеримых множеств образует σ-алгебру $\mathcal{A}$ и сужение ν на эту σ-алгебру — полная мера. Стандартные примеры этой общей конструкции получаются продолжением по Каратеодори с полукольца. Например,

- **мера Лебега** в $\mathbb{R}^n$: возьмем классический объем λ_n на ячейках $\mathcal{P}_n$ и определим внешнюю меру

  $$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(P_n) \ \mid\ P_n \text{ — кубы (ячейки)},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} P_n\}.$$

  По теоремам с лекций, внешняя мера — субмера, совпадающая с λ_n на $\mathcal{P}_n$. Обозначим $\mathcal{L}^n$ — множество всех измеримых относительно λ^* (лебеговская σ-алгебра).

- Другой важный пример меры — это **дельта мера**, сосредоточенная в точке $x \in X$:

  $$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

1. Измеримы ли следующие подмножества Евклидова пространства? Если да, то найдите их меру Лебега
   А) $A = \mathbb{Q}$
   Б) стандартное Канторово множество
   В) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ \{x\} = \{y^2\}\}$
   Г) $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \ \mid\ |\sin x| < \frac{1}{2}\ \cos(x + y) \notin \mathbb{Q}\}$
   Д) $A = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2\}$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция.
   Е) $A = \{x \in [0, 1] \ \mid\ \text{если } x = 0, a_1 a_2 \dots,\ \text{ то } a_i < 5\ \forall i\}$
   Ж) $A = \{x \in [0, 1] \ \mid\ \text{если } x = 0, a_1 a_2 \dots,\ \text{ и } a_i = 2,\ \text{ то } a_{i+1} = 3\}$
2. Множество $A \subset [0, 1]$ называется нигде не плотным, если $\forall a < b\ \mathrm{Int}((a, b) \setminus A) \ne \varnothing$. Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует нигде не плотное множество A такое, что $\lambda_1(A) \ge 1 - \varepsilon$. *Hint:* вспомните, что Канторово множество нигде не плотно! Но это не ответ...
3. Пусть μ^* — внешняя мера на 2^X, полученная из меры μ на полукольце $\mathcal{P}$, причем $\mu^*(X) < \infty$. Покажите, что A измеримо относительно μ тогда и только тогда, когда

   $$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X).$$

Определение: функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **измеримой** относительно σ-алгебры $\mathcal{A} \subset 2^X$, если $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всякого $B \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — Борелевская σ-алгебра. Для того, чтобы функция была измеримой, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий

1. $\{x \ :\ f(x) \le t\} \in \mathcal{A},\ \forall t \in \mathbb{R}$
2. $\{x \ :\ f(x) < t\} \in \mathcal{A},\ \forall t \in \mathbb{R}$
3. $\{x \ :\ f(x) \ge t\} \in \mathcal{A},\ \forall t \in \mathbb{R}$
4. $\{x \ :\ f(x) > t\} \in \mathcal{A},\ \forall t \in \mathbb{R}$

Измеримость сохраняется при всех алгебраических операциях и при поточечной сходимости (и даже при сходимости по мере).

4. Поймите, что все указанные выше измеримости функций эквивалентны.
5. Измеримы ли следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   А) $f(x) \equiv 5$
   Б) $f(x) = \chi_K(x)$ — характеристическая функция Канторовского множества

В) $f(x) = e^x$

Г) $f(x)$ — непрерывная функция

Д) h, g — измеримые, а $f(x) = \min(h(x), g(x))$

Е) f_n — измеримые, а $f(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$

Ж) $g(x)$ — дифференцируемая функция, $f(x) = g'(x)$

6. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и
$$n(c) = \#\{x \in [0,1] \ \mid \ f(x) = c\}.$$
Покажите, что $n(c)$ — измеримая функция.

Теорема Егорова: пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ — измеримые и почти всюду конечные. При этом $f_n \to f$ почти везде на E и $\mu E < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset E : \ \mu(e) < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus e$.

7. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $f_n : X \to \mathbb{R}$ — последовательность функций. Требуется показать, что f_n сходятся поточечно п.в. к $f : X \to \mathbb{R}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найти $E \subset X$ такое, что $\lambda_1(X \setminus E) \le \varepsilon$ и $f_n|_E$ сходятся равномерно.

   А) $f(x) = x^n, \quad X = [0,1]$

   Б) $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2(\sin x)^2}, \quad X = [0,\pi]$

   В) $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \sin(\pi k x)), \quad X = [0,1]$

   Г) $f_n(x) = \sin(nx)^{2^n}, \quad X = [0,\pi]$

   Д) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+k^2e^{-2nx}}, \quad X = [0,+\infty)$

Для тех, кто хочет поразвлекаться...

8. Докажите, что борелевская σ-алгебра B на прямой $\mathbb{R}$ континуальна. Напомню, что B получается в результате всевозможных счетных пересечений, объединений и разности интервалов на прямой.

9. Функция Дирихле
$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное} \\ 1, & x \text{ — рациональное} \end{cases}$$
может быть получена как двойной предел непрерывных функций
$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\cos(2\pi n! x))^m$$
Можно ли получить функцию $\psi(x)$ как одинарный предел непрерывных функций?

Занятие 8, 22.10.19. И еще чутка про теорию меры

1. Множество $A \subset [0,1]$ называется нигде не плотным, если $\forall a < b$ $\mathrm{Int}((a,b) \setminus A) \neq \varnothing$. Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует нигде не плотное множество A такое, что $\lambda_1(A) \geq 1 - \varepsilon$.

   Определение: функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется **измеримой** относительно σ-алгебры $\mathcal{A} \subset 2^X$, если $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всякого $B \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$ — Борелевская σ-алгебра. Для того, чтобы функция была измеримой, достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий

   А) $\{x \ : \ f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}, \ \forall t \in \mathbb{R}$
   Б) $\{x \ : \ f(x) < t\} \in \mathcal{A}, \ \forall t \in \mathbb{R}$
   В) $\{x \ : \ f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}, \ \forall t \in \mathbb{R}$
   Г) $\{x \ : \ f(x) > t\} \in \mathcal{A}, \ \forall t \in \mathbb{R}$

   Измеримость сохраняется при всех алгебраических операциях и при поточечной сходимости (и даже при сходимости по мере).

2. Измеримы ли следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   А) $f(x) \equiv 5$
   Б) $f(x) = \chi_K(x)$ — характеристическая функция Канторовского множества
   В) $f(x) = e^x$
   Г) $f(x)$ — непрерывная функция
   Д) h, g — измеримые, а $f(x) = \min(h(x), g(x))$
   Е) f_n — измеримые, а $f(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
   Ж) $g(x)$ — дифференцируемая функция, $f(x) = g'(x)$

3. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и
$$n(c) = \#\{x \in [0,1] \ \mid \ f(x) = c\}.$$
   Покажите, что $n(c)$ — измеримая функция.

   Вспомните определения разных сходимостей: поточечной, равномерной, почти всюду, по мере.

4. Приведите пример последовательности $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

   А) сходящуюся поточечно, но не равномерно,
   Б) сходящуюся по мере, но не поточечно.

   Теорема Егорова: пусть $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ — измеримые и почти всюду конечные. При этом $f_n \to f$ почти везде на E и $\mu E < +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset E : \ \mu(e) < \varepsilon$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus e$.

5. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $f_n : X \to \mathbb{R}$ — последовательность функций. Требуется показать, что f_n сходятся поточечно п.в. к $f : X \to \mathbb{R}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найти $E \subset X$ такое, что $\lambda_1(X \setminus E) \leq \varepsilon$ и $f_n|_E$ сходятся равномерно.

   А) $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2(\sin x)^2}, \quad X = [0,\pi]$
   Б) $f_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - \sin(\pi k x)), \quad X = [0,1]$
   В) $f_n(x) = \sin(nx)^{2^n}, \quad X = [0,\pi]$
   Г) $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+k^2 e^{-2nx}}, \quad X = [0,+\infty)$

6. Покажите, что $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — суммируемая, если

   А) f непрерывна на $(0,1]$ и неопределенный интеграл $\int_0^1 f(x)\,dx$ абсолютно сходится.
   Б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|2x-1|}}$
   В) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(\log n)^2}$ п.в.

7. Пусть $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ — последовательность суммируемых функций. Верно ли, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ сходится, если

   А) $f_n(x) = \frac{ne^x}{\sqrt{n^2 x+1}}$
   Б) $f_n(x) = \frac{ne^x}{n\cos(\pi x)+1}$
   В) $f_n(x) = \frac{ne^x}{xn \log n+1}$
   Г) $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^2\{x+\pi n\}+1}}$

Занятие 9, 05.11.19. Кратные интегралы

1. Определите, по какому множеству происходит интегрирование в следующих повторных интегралах:

   А) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx$ Б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$

2. Вычислите интеграл $\int_X f(x,y)\,d\lambda_2$, если

   А) $f = (1+x+y)^{-2}$, X — треугольник, ограниченный $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

   Б) $f = y^2$, X — множество, ограниченное параболой $x = y^2$ и прямой $y = x - 2$

   В) $f = x$, множество X задано неравенствами $2rx \le x^2 + y^2 \le R^2$ для некоторых $0 < 2r < R$.

3. Переставьте интегралы местами:

   А) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy$ Б) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\log x}^{3x} f(x,y)\,dy$ В) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$

4. Вычислите следующие интегралы:

   А) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}\,dy$ Б) $\int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ В) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\,dy$

5. Вычислите $\int\limits_X f\,d\lambda$, где

   А) $f(x,y) = x\cos y + y\cos x, \quad X = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

   Б) $f(x,y) = x^3 + y^3, \quad X = \{x^2 + y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}$

   В) $f(x,y) = x^2 + y^2$, X ограничено прямыми $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a$

   Г) $f(x,y) = \frac{1}{y}$, X ограничено прямыми $y = x,\ y = 2x,\ y = \frac{2-x}{2},\ y = 2(2-x)$

   Д) $f(x,y) = x, \quad X = \{2x \le x^2 + y^2 \le 6x,\ y \le x\}$

6. Докажите, что площадь круга радиуса 1 равна π.

7. А) Вычислите интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d\lambda$,

   Б) Вычислите интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,d\lambda$.

Для желающих

8. Пусть $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \mid\ x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$.

   А) Покажите, что
   $$\lambda_n(I_n) = \frac{1}{n!}$$

   Б) Стандартный n-мерный симплекс — это
   $$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}) \ \mid\ x_i \ge 0,\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1\}.$$
   Покажите, что
   $$\lambda_n(\Delta_n) = (n+1)^{3/2} I_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

9. Вычислите объем n – мерного шара и площадь n – мерной сферы.

Занятие 10, 12.11.19. Кратные интегралы. Абака!

	(1) Замена переменной	(2) n-кратные интегралы	(3) Немного теории вероятностей
10	Вычислите интеграл, перейдя к полярным координатам: А) $\int\limits_{9\leqslant x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1}$ Б) $\int\limits_{x,y\geqslant 0,\, x^2+y^2\leqslant 1} y^2 e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$	А) Найдите объем n-мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \pm h_i, \quad h_i > 0, i = 1, \ldots, n$ при условии, что $\det(a_{ij}) \neq 0$. Б) Вычислите: $\int\limits_{[0,1]^n} \max(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$	На отрезке $[a,b]$ случайным образом выбираются 2 точки. А) Найдите среднее расстояние между ними. Б) Какова вероятность, что расстояние между ними больше M?
20	Вычислите интеграл, делая подходящую замену координат: А) $\iint\limits_{\Omega} \frac{x}{y}\,dx\,dy,$ где Ω ограничено параболами $y = x^2$, $8y = x^2$, $x = y^2$, $8x = y^2$ Б) $\iint\limits_{\Omega} (x^2 - y^2)\sin \pi(x-y)^2\,dx\,dy,$ где $\Omega = \{\lvert y\rvert \leqslant x \leqslant 1 - \lvert y\rvert\}$.	Пусть $I_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}$. А) Покажите, что $\lambda_n(I_n) = \frac{1}{n!}$ Б) Стандартный n-мерный симплекс — это $\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = 1\}.$ Покажите, что $\lambda_n(\Delta_n) = (n+1)^{3/2} I_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$	А) На отрезке $[0,a]$ случайным образом выбираются 3 числа. Какова вероятность того, что они являются длинами некоторого треугольника? Б) На отрезке $[-a,a]$ случайным образом выбирается 2 точки u, v. Что вероятнее: корни уравнения $z^2 + uz + v = 0$ лежат на вещественной оси (вероятность $P_1(a)$) или корни этого уравнения не лежат на вещественной оси (вероятность $P_2(a)$)? К чем устремятся вероятности $P_1(a)$, $P_2(a)$ при $a \to \infty$?
30	$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$	А) Вычислите объем n-мерного шара и площадь n-мерной сферы. Б) Пусть n-мерный арбуз — это шар B_1 радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$, а его корка толщины h — это $B_1 \setminus B_{1-h}$. Докажите, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N :$ (1) $h < \varepsilon$ (2) λ_n(арбузной корки) $\geqslant (1-\varepsilon)\lambda_n$(арбуза)	В круг случайно и независимо брошены 2019 точек. Пусть A — их выпуклая оболочка. Что более вероятно: A — треугольник или A — четырехугольник?

Говоря о случайном выборе точек мы подразумеваем, что вероятность выбрать точку, принадлежащую некоторому множеству, пропорциональна его мере (объему, площади, длине).

Занятие 11, 19.11.19. Гамма и Бета функции

Определим гамма-функцию $\Gamma(z)$, $z>0$, и Бета-функцию $B(a,b)$, $a,b>0$:

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx \qquad\qquad B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

0. А) Осознайте, что гамма-функция — это обобщение факториала. А именно, $\Gamma(n+1)=n!, \quad n\in\mathbb{N}$.

   Б) Выведите, что $\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$.

1. А) С помощью подходящей замены переменной докажите закон умножения Якоби: $\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)B(a,b)$.

   Б) Покажите, что $B(a,b)$ является обобщением биномиального коэффициента. Как они соотносятся?

   В) Покажите, что $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

   Г) Найдите $\Gamma(1/2+n)$ для любого натурального n.

2. Покажите, что объем n-мерного шара равен $\lambda_n(B_n(R))=\dfrac{\pi^{n/2}R^n}{\Gamma(n/2+1)}$.

   А) С помощью рекуррентного соотношения между $\lambda_n(B_n(1))$ и $\lambda_{n-1}(B_{n-1}(1))$.

   Б) С помощью сферической замены координат.

3. Пусть $S_n=\{x_k\geqslant 0:\sum\limits_{k=1}^n x_k\leqslant 1\}$.

   А) Докажите формулу Дирихле ($p_k>0$, $k=1,\ldots,n$):

$$\int\limits_{S_n} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)}.$$

   (когда $n=2$, это эквивалентно уже известному тождеству $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$).

   Б) Докажите формулу Лиувилля ($p_k>0$, $k=1,\ldots,n$):

$$\int\limits_{S_n} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int\limits_0^1 f(t)\,t^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\,dt.$$

4. Сведите к гамма и бета функциям следующие интегралы:

   А) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\sin^a(x)\cos^b(x)\,dx$;

   Б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (x^2+y^2)^p\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad p>-1$;

   В) $\displaystyle\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz$;

   Г) $\displaystyle\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(t^2-x^2-y^2-z^2)^p}$, $G=\{x^2+y^2+z^2<t^2\}$.

Дополнительно для желающих.
Немного про кратные несобственные интегралы.

1. При каких $\alpha < 0$ функция $|x|^\alpha = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2})^\alpha$ интегрируема:

   А) по $\mathbb{R}^2$ $(n = 2)$? А по единичному шару в $\mathbb{R}^2$? А вне единичного шара в $\mathbb{R}^2$?

   Б) по $\mathbb{R}^n$? А по единичному шару в $\mathbb{R}^n$? А вне единичного шара в $\mathbb{R}^n$?

2. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $x = (x_1, x_2)$, и $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x|^2 f(x_1, x_2) = a$. Покажите, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\log r} \int\limits_{\{x_1,x_2\ :\ x_1^2+x_2^2\leq r^2\}} f(x, y)\, dxdy = 2\pi a.$$

3. А) Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

   Б) Докажите, что сходятся повторные интегралы

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \sin(x^2 + y^2)\, dy \qquad\qquad \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty \sin(x^2 + y^2)\, dx$$

   и имеют одинаковое значение. Найдите это значение.

   В) Докажите, что существует двойной предел $\lim\limits_{a,b\to+\infty} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ и найдите это значение. Сравните его со значениями повторных интегралов.

   Г) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

   где $G_n = \{x^2 + y^2 < 2\pi n, x < 0, y > 0\}$ и сравнить его с двойным и повторными пределами.

4. При каких α сходится интеграл: $\int\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \sin((x^2 + y^2)^\alpha)\, dx\, dy$?

5. При каких положительных значениях параметров сходятся данные интегралы?

$$\text{А)} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{dx\, dy\, dz}{1 + (xyz)^p}; \qquad \text{Б)} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}; \qquad \text{В)} \iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{dx\, dy}{|x|^p + |y|^q}; \qquad \text{Г)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dx\, dy}{(1 - xy)^p}$$

Интегралы с параметром

1. Вычислите F', если $F(\alpha) = \int\limits_{\mathrm{tg}(\alpha)}^{\sin(\alpha)} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

2. Определим функцию Бесселя порядка n формулой $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin(\varphi))\, d\varphi$. Докажите, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J(x) = 0.$$

3. Вычислите следующие интегралы:

   А) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^a - x^b}{\ln(x)}\, dx$, $a, b > 0$

   Б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin(x)}{x} e^{-ax}\, dx$, $a > 0$

   В) $\int\limits_0^\infty \sin(\lambda) \cos(\lambda x) \frac{d\lambda}{\lambda}$

   Г) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}\, dx$

Занятие 12, 26.11.19. Интегралы-интегральчики

Сюжет номер 1.

1. Найдите среднее значение функции $f = x^2 + y^2 + z^2$ по области $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z\}$.
2. Найдите $\int_X f\, d\lambda_3$, если

   А) $f = z, \quad X = \{3(x^2 + y^2) \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$

   Б) $f = xy^2z^3$, множество X ограничено поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$

Сюжет номер 2.

1. Пусть $I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$.

   А) Покажите, что $\lambda_n(I_n) = \frac{1}{n!}$.

   Б) Стандартный n-мерный симплекс — это

$$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}) \mid x_i \ge 0,\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 1\}.$$

   Покажите, что $\lambda_n(\Delta_n) = (n+1)^{3/2} I_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$.

2. Найдите объем конуса $\Lambda = \{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \le (a - x_n)^2,\ 0 \le x_n \le a\}, \quad a > 0$.
3. Пусть $X = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 \le y^2 \le |x|^2 + 1\}$. При каких $\alpha > 0$ интеграл $\int_X \frac{dydx_1 \dots d_{x_n}}{(1+y^2)^\alpha}$ конечен?
4. Вычислите $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} |x|^n\, d\lambda_n(x)$.

Сюжет номер 3.

1. Пусть $p < \frac{1}{2}$. Докажите, что функция

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{u^2+v^2 \leqslant 1} \frac{du\, dv}{((x-u)^2 + (y-v)^2)^p}$$

   принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^2)$.

2. Докажите, что следующие равенства выполняются для всех $\alpha \in \mathbb{R}$:

   А) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2(x) + \alpha^2 \cos^2(x))\, dx = \pi \ln\left(\frac{|\alpha|+1}{2}\right)$

   Б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \qquad \left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\right]$

   В) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|}$.

Напомним, что $\qquad \Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t}\, dt, \qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$

Сюжет номер 4.

1. Следующие интегралы нужно выразить через Γ - функцию:

   А) $\int_0^1 x^\alpha (1 - x^\beta)^\gamma\, dx, \quad \alpha > -1,\ \beta > 0,\ \gamma > -1$

   Б) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^\beta}\, dx, \quad 0 < \alpha < \beta$

2. Докажите, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Занятие 13, 03.12.19. Равномерная сходимость интегралов. Интегралы с параметром

Равномерная сходимость интегралов

1. Равномерно ли сходятся интегралы на заданных промежутках?

А) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{1+x^2}\,dx, \quad a \in \mathbb{R};$ Б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln^a(x)}{x^{3/2}}\,dx, \quad a \in [0, 1000];$

В) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,dx, \quad x \in [2, +\infty);$ Г) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x}\,dx, \quad x \in [0, 2];$

Д) $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{a}e^{-ax^2}\,dx, \quad a \in (0, +\infty);$ Е) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(a^2x)}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}(ax)\,dx, \quad a \in [1, +\infty).$

Тут полезно вспомнить всякие достаточные условия равномерной сходимости интегралов: признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля и тд.

Интегралы с параметром

1. Вычислите F', если $F(\alpha) = \int\limits_{\operatorname{tg}(\alpha)}^{\sin(\alpha)} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. А) Докажите, что при $a > 0, b > 0$ выполнено равенство

$$\Phi(a,b) := \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x} e^{-bx}\,dx = \operatorname{arctg}\Big(\frac{a}{b}\Big)$$

Б) Используя пункт А докажите, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$$

3. А) Покажите, что при $a > 0$ функция

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению: $I''(a) = I(a)$.

Б) Найдите $I(a)$.

4. Вычислите следующие интегралы:

А) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^a - x^b}{\ln(x)}dx,\ a, b > 0$ Б) $\int\limits_0^\infty \sin(\lambda)\cos(\lambda x)\frac{d\lambda}{\lambda}$ В) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$

Полезны такие теоремы об интегралах с параметром:

Теорема 1. *Пусть* $f : [a, +\infty) \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$. *Если*

1. $f(x,t) \rightrightarrows \varphi(x)$ *при* $t \to t_0$ *равномерно по* $x \in [a, b]$ *для любого отрезка* $[a, b] \subset [a, \infty)$
2. $\int\limits_0^\infty f(x,t)\,dx$ *равномерно сходится при* $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.

Тогда

$$\lim_{t\to t_0} \int_a^\infty f(x,t)\,dx = \int_a^\infty \lim_{t\to t_0} f(x,t)\,dx$$

Теорема 2. *Пусть* $f, f'_t \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ *и*

1. $\Phi(t) := \int\limits_a^\infty f'_t(x,t)\,dx$ *равномерно сходится на* $[c, d]$
2. $F(t) := \int\limits_a^\infty f(x,t)\,dx$ *сходится в некоторой точке* $t = t_0$

Тогда $F(t)$ *равномерно сходится, более того* $F \in C^1[c, d]$ *и* $F'(t) = \Phi(t)$.

2 Домашние задания

ДЗ 1. Непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных. Дедлайн: 9 сентября 14:00

1. (7) Покажите, что если функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x, а также монотонна и непрерывна по переменной y, то она непрерывна как функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.

2. (3) Покажите, что $x^a y^b = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ при $(x, y) \to (0, 0)$ тогда и только тогда, когда $a > 0, b > 0$ и $a + b > 1$.

3. Дифференцируемы ли следующие функции в точке 0:

   А) (5) $f(x, y) = \arctan(1 + x^{4/5} y^{2/7})$;

   Б) (5) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

   В) (5) $f(x, y) = \dfrac{\log\left((1 + xy)/(1 - xy)\right) - 2xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$;

   Г) (5) $f(x, y) = \int_0^x \cos(\sqrt[3]{y^2 t})\, dt$.

4. (8) Найти все значения $\alpha > 0$, при которых функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$, если $f(0, 0) = 0$, а при $(x, y) \neq (0, 0)$ имеем $f(x, y) = |x + y|^{3\alpha} + |y|^{4-\alpha}$.

Бонус для желающих:

5. (7) SL_n — это «поверхность» в $\mathbb{R}^{n^2}$, состоящая из всех матриц $n \times n$ с определителем 1. Опишите касательную гиперплоскость к этой поверхности в точке E_n (единичная матрица).

ДЗ 2. Дифференцирование сложной и неявной функций. Дедлайн: 16 сентября 14:00

1. (4) Пусть $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемое отображение и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что $\gamma'(t)$ ортогонально $\nabla f(\gamma(t))$ для всякого t. Покажите, что $t \mapsto f(\gamma(t))$ постоянная функция.

2. (7) Пусть $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, причем выполнено $f(x-u(x,y), y-u(x,y)) = 0$ для всяких x, y и некоторой дифференцируемой функции f. Предположим, что $f_1'(x,y) \neq 0$ для любых x, y. Покажите, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 1.$$

3. Точка (x, y) называется стационарной (критической) точкой функции $u = u(x, y)$, если $\nabla u(x, y) = 0$. Найдите значения u во всех стационарных точках, если выполняется

   А) (5) $x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0,\ u > 2$

   Б) (5) $(x^2 + y^2 + u^2)^2 = 8(x^2 + y^2 - u^2)$

4. (7) Пусть имеется система уравнений $F(x, y, u, v) = 0$, $G(x, y, u, v) = 0$, и известно, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственная система функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, удовлетворяющая

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0 \end{cases}$$

Пусть частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$ (и аналогично для функции G) существуют и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), а также

$$\det \begin{pmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Покажите, что

$$\begin{pmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_u' & F_v' \\ G_u' & G_v' \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_x' & F_y' \\ G_x' & G_y' \end{pmatrix}$$

Бонус для желающих

5. Обозначим через M_n пространство $n \times n$ вещественных матриц, отождествленное с $\mathbb{R}^{n^2}$ стандартным способом: координатными функциями являются элементы матрицы, то есть координаты матрицы X — это набор чисел $X_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$. Рассмотрим функцию $f : M_n \to \mathbb{R}$, заданную $f(X) = \det X$. Градиент f в точке X можно отождествить с матрицей естественным образом: положим $A_{ij}(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial X_{ij}}$.

   А) (5) Обозначим через $\mathrm{Id}_{n\times n}$ единичную матрицу. Найдите $\nabla f(\mathrm{Id}_{n\times n})$

   Б) (7) Вычислите градиент ∇f в точке X.

   В) (15) Найдите все критические точки функции f, то есть множество таких X, что $\nabla f(X) = 0$.

6. А теперь вычислим градиент определителя по-другому:

   А) (3) Зафиксируем $A \in M_n$, рассмотрим отображение $\rho_A : M_n \to M_n$ заданное $\rho_A(X) = A \cdot X$. Найдите матрицу Якоби отображения ρ_A.

   Б) (3) Пусть f — функция из предыдущего пункта, то есть $f(X) = \det X$. Зафиксируем матрицу A, предположим, что A — обратима. Проверьте, что $f = \det A \cdot f \circ \rho_{A^{-1}}$.

   В) (3) Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции и предыдущим пунктом, покажите, что $\nabla f(A) = \det A \cdot A^{-1}$.

ДЗ 3. Экстремумы функций нескольких переменных. Дедлайн: 30 сентября 14:00

1. (5) Приведите пример функции $u(x,y)$, у которой в точке (x^0, y^0) выполнено: $\nabla u(x_0, y_0) = 0$ и матрица Гессе неотрицательно определена $(H(u))(x_0, y_0) \geqslant 0$, но в точке (x_0, y_0) нет локального экстремума (минимума).

2. Исследуйте следующие функции на экстремумы (нужно определить локальные минимумы и максимумы):

   А) (8) $f = x_1 x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^n \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} k x_k\right)$

   Б) (8) $f = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k},\ x_0 = a > 0,\ x_{n+1} = b > 0$

3. Исследуйте функцию $u = u(x,y)$ на экстремум (нужно определить локальные минимумы и максимумы), если

   А) (10) $x^2 + y^2 + u^2 - 4x - 6y - 4u + 8 = 0,\ u > 2$

   Б) (10) $(x^2 + y^2 + u^2)^2 = 8(x^2 + y^2 - u^2),\ u > 0$

4. (10) **Жизненная задача**: научиться предсказывать цену квартиры, если знаем какие-то важные параметры квартиры. Например, у нас есть сводка от m квартир, про каждую из которых известно:

$$(x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i, \dots, x_n^i) = (\text{количество комнат, количество квадратных метров, этаж,}$$
$$\text{рейтинг района, \dots, количество ванных комнат}), i = 1, \dots, m,$$

   а также известна стоимость квартиры y^i, $i = 1, \dots, m$. Это известные данные задачи. Пусть теперь нам дают данные по новой квартире $(z_1, \dots, z_n)$ и нам нужно предсказать ее стоимость, используя наилучшим образом имеющиеся данные про квартиры. Как это сделать?

   Естественно предположить, что цена квартиры есть функция от данных по квартире, т.е. $y = f(x_1, \dots, x_n)$, причем $y^i \approx f(x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 1, \dots, m$ (равенство не обязательно достигается). Одной из простейших моделей является **модель линейной регресии**, т.е. $f(x_1, \dots, x_n)$ — линейная функция:

$$f_w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \qquad w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$$

   Рассмотрим так называемую функцию ошибки:

$$E(w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^{m} (f_w(x_1^i, \dots, x_n^i) - y^i)^2.$$

   Задача: найдите $w_1, \dots, w_n$, на которых функция $E(w_1, \dots, w_n)$ достигает минимум.
   Замечание 1: с этой задачи начинается машинное обучение. Для интересующихся есть курс на Coursera по маш.обучению: (от Andrew NG) https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/welcome
   Замечание 2: можно рассматривать разные модели, меняя функции f_w (hypothesis function) и E (cost function).

5. **Физическая задача**: пусть на отрезке $[-1, 1]$ расположены n одноименных зарядов. Как известно, они отталкиваются друг от друга, но в некотором положении находят равновесие. Вопрос: в каком положении будет равновесие? Оказывается, тут полезны так называемые ортогональные полиномы Якоби.
   Полиномы Якоби определяются следующим образом ($\alpha > -1$, $\beta > -1$):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!} (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-1)^{n+\alpha} (x+1)^{n+\beta}\right], \quad x \in [-1, 1]$$

   А) (3) Поймите, что $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ полиномы порядка n.

   Б) (5) Поймите, что у многочлена Якоби ровно n различных нулей в интервале $(-1, 1)$.

   В) (5) Проверьте, что полиномы Якоби удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$(1 - x^2) y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) y' + n(n + \alpha + \beta + 1) y = 0$$

   Г) (5) Пусть $y(x) = \prod\limits_{j=1}^{n} (x - x_j)$, где все x_j — различные числа. Покажите, что

$$\sum_{i=1, i \neq j} \frac{2}{x_j - x_i} = \frac{y''(x_j)}{y'(x_j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

   Д) (12) Пусть в интервале $(-1, 1)$ расположены частицы $x_1, \dots, x_n$ с зарядом $+1$, а в точках 1 и -1 находятся частицы с зарядами $(\alpha + 1)$ и $(\beta + 1)$. Если между ними действуют кулоновские силы, то суммарная энергия системы выражется следующей формулой:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|} + \sum_{j=1}^{n} \left((\alpha + 1) \log \frac{1}{|x_j - 1|} + (\beta + 1) \log \frac{1}{|x_j + 1|} \right)$$

   Базовый физический принцип: система минимизирует свою энергию. В положении равновесия энергия минимальна. Докажите, что энергия достигает минимума, если $x_1, \dots, x_n$ — нули полиномов Якоби.

6. (8) Найдите расстояние между поверхностями:

$$\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 12z = 288.$$

7. А) (5) Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, обозначим через ∂_v линейный оператор на пространстве многочленов $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, заданный по правилу

$$\partial_v(p)(x) = \frac{\partial p(x)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{p(x + tv) - p(x)}{t}.$$

Покажите, что ∂_v — квазинильпотентный, то есть для всякого $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ найдется d такое, что $\partial_v^d p = 0$.

Б) (6) Квазинильпонетнтность позволяет определить $\exp(\partial_v)$ по правилу

$$\exp(\partial_v) := \sum_{d=0}^{+\infty} \frac{\partial_v^d}{d!}$$

($\exp(\partial_v)p$ задается конечным рядом для любого p). Докажите, что $(\exp(\partial_v))(p(x)) = p(x + v)$.

ДЗ 4. Условные экстремумы функций нескольких переменных. Дедлайн: 7 октября 14:00

1. Найдите условные экстремумы:

   А) (5) $f = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8}$

   Б) (6) $f = \log(xy)$ при условии $x^3 + xy + y^3 = 0$

   В) (4) $f = x^4 + y^4$ при условии $(x-1)^3 - y^2 = 0$

   Г) (6) $f = 1 - 4x - 8y$ при условии $x^2 - 8y^2 = 8$

   Д) (7) $f = x_1^2 + \dots + x_n^2$ при условии $x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$
   Выясните, является ли точка точкой условного локального минимума или максимума.

   Е) (3) С помощью пункта Г) докажите неравенство между средним квадратичным и средним геометрическим:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \qquad x_1, \dots, x_n \geqslant 0$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном множестве

   А) (6) $f(x,y,z) = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1.$

   Б) (10) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz, \quad x + y + z = 1, 0 \leqslant x, y, z \leqslant \frac{1}{2}$

3. (простейшая изопериметрическая задача) Среди замкнутых кривых длины $2l$ найдите ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Будем называть такую кривую оптимальной кривой.

   А) (2) Поймите, что область, которую ограничивает оптимальная кривая, — выпуклая область.

   Б) (2) Если точки A и B делят длину оптимальной кривой пополам, то хорда AB делит площадь области, ограниченной кривой, пополам.
   Зафиксируем какую-нибудь хорду и рассмотрим вспомогательную задачу:
   найти максимум площади под графиком кривой $y = y(x)$, $x \in [-a, a]$, $y(-a) = y(a) = 0$

$$S(y(x)) = \int_{-a}^{a} y(x)\,dx \tag{2}$$

   при условии, что длина кривой равна $l > 2a$, т.е.

$$L(y(x)) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = l \text{ — fixed}$$

   В) (3) Рассмотрите функцию Лагранжа

$$\Lambda(y) = S(y) - \lambda L(y) = \int_{-a}^{a} (y - \lambda\sqrt{1 + y'(x)^2})\,dx$$

   Покажите, что

$$\Lambda(y + \varepsilon h) = \Lambda(y) + \varepsilon \cdot \int_{-a}^{a} \Big(1 - \lambda \frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Big)\Big) \cdot h(x)\,dx + O(\varepsilon^2)$$

   Г) (2) Выведите, что необходимым условием того, что y — минимум, является

$$\int_{-a}^{a} \Big(1 - \lambda \frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Big)\Big) \cdot h(x)\,dx = 0.$$

   Покажите, что это равносильно

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\Big) = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

   Д) (3) Докажите, что общим решением дифференциального уравнения (3) является часть окружности, т.е.

$$(y - c_1)^2 + (x - c_2)^2 = \lambda^2$$

   Е) (3) Пользуясь тем, что $y(-a) = y(a) = 0$ и $L(y) = l$, найдите константы c_1, c_2, λ.

   Ж) (3) Пользуясь решением вспомогательной задачи, докажите, что кривая длины $2l$, ограничивающая наибольую площадь — это окружность.

Бонус для желающих:

4. (10) Докажите основную теорему алгебры (с помощью матана): пусть $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — многочлен ненулевой степени. Докажите, что у него есть хотя бы один комплексный корень.

Hint: действуйте от противного. Пусть $P(z)$ нигде не равен нулю. Рассмотрите $1/|P(z)|^2$ на больших кругах и поймите, что где-то достигается максимум (посмотрите на гессиан). Рассматривайте $P(z)$ как функцию двух переменных (x, y), где $z = x + iy$.

Условные экстремумы и функция Лагранжа

Давайте поймем, зачем нужна функция Лагранжа. Пусть мы хотим найти локальный минимум/максимум функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ при условии $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Давайте зафиксируем некоторую точку $x(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0))$ и будем рассматривать ее малые возмущения $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), \dots, x_n(\varepsilon))$, ε — маленькое, которые лежат на поверхности g, т.е. $g(x(\varepsilon)) = 0$. Рассмотрим

$$f(x(\varepsilon)) = f(x(0)) + \frac{d}{d\varepsilon}\Big[f(x(\varepsilon))\Big]\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big[f(x(\varepsilon))\Big]\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) =$$
$$= f(x(0)) + \nabla f(x(0)) \cdot x'(0) \cdot \varepsilon + \Big[\nabla f(x(0)) \cdot x''(0) + \langle x'(0), H(f)x'(0)\rangle\Big] \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).$$

Мы видим, что чтобы точка $x(0)$ — была точкой локального экстремума, необходимо, чтобы:

- коэффициент перед ε был равен 0. Иначе можно выбрать возмущения с $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$ и получить значения функции f как больше, так и меньше, чем $f(x(0))$. Значит $\nabla f(x(0)) \cdot x'(0) = 0$.

  Заметим, что это означает, что $\nabla f(x(0)) \parallel \nabla g(x(0))$, т.е. существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\nabla f(x(0)) = \lambda \nabla g(x(0))$.

  Действительно, раз $g(x(\varepsilon)) = 0$, то $\nabla g(x(0)) \cdot x'(0) = 0$, и если считать, что $g(x_1, \dots, x_n)$ задает гиперповерхность, то размерность пространства касательных векторов в точке $x(0)$ равна $(n-1)$: $\dim\{x'(0) : g(x(\varepsilon)) = 0\} = n - 1$, а значит ортогональное дополнение к ним имеет размерность 1 и вектора $\nabla f(x(0))$ и $\nabla g(x(0))$ параллельны.

- коэффициент перед ε^2 был знакоопределен (если < 0, то точка $x(0)$ — локальный максимум, если > 0, то точка $x(0)$ — локальный минимум).

  Тут возникает загвоздка: теперь положительной определенности гессиана $H(f)$ функции f уже недостаточно для знакоопределенности коэффициента перед ε^2. В некотором смысле это происходит потому, что поверхность g имеет ненулевую кривизну, за что как раз отвечает $x''(0)$ (читай wiki для подробностей). Тем самым слагаемое вида $\nabla f(x(0)) \cdot x''(0)$ нам все портит.

  Можете сами придумать пример, когда $H(f)$ знакоопределен, а локального экстремума нет.

Так вот функция Лагранжа позволяет обо все этом не думать, и свести задачу поиска условного экстремума к поиску обычного экстремума.

Рассмотрим функцию $L(x) = f(x) - \lambda g(x)$. Заметим, что на поверхности $g = 0$ функции $L(x) \equiv f(x)$, поэтому искать минимум функции f при условии $g = 0$ и минимум функции L при условии $g = 0$ одно и тоже. Рассмотрим:

$$L(x(\varepsilon)) = L(x(0)) + \frac{d}{d\varepsilon}\Big[L(x(\varepsilon))\Big]\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Big[L(x(\varepsilon))\Big]\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) =$$
$$= L(x(0)) + \nabla L(x(0)) \cdot x'(0) \cdot \varepsilon + \langle x'(0), H(L)x'(0)\rangle \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2).$$

Причем перед ε^2 есть только одно слагаемое с гессианом $H(L)$, т.к. $\nabla L(x(0)) = \nabla f(x(0)) - \lambda \nabla g(x(0)) = 0$. А значит, для того, чтобы точка $x(0)$ — была точкой локального экстремума, необходимо, чтобы:

- коэффициент перед ε был равен 0: $\nabla L(x(0)) = \nabla f(x(0)) - \lambda \nabla g(x(0)) = 0$.

- коэффициент перед ε^2 был знакоопределен, т.е. гессиан функции Лагранжа $H(L)$ — знакоопределен (если < 0, то точка $x(0)$ — локальный максимум, если > 0, то точка $x(0)$ — локальный минимум).

Т.о. в задачах на условный локальный экстремум достаточно рассматривать функцию Лагранжа и для нее искать обычный локальный экстремум!

ДЗ 5. Градиентный спуск. Дедлайн: 14 октября 14:00

Метод градиентного спуска (gradient descent) — это следующий алгоритм поиска минимума гладкой функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^d$ — произвольная точка, определим последовательность $x_1, x_2, \ldots$ итеративно

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla f(x_n), \tag{4}$$

где α_n — это (любая) точка глобального минимума функции $\phi(\alpha) := f(x_n - \alpha \nabla f(x_n))$. Таким образом, мы стартуем с некоторой точки и ищем направление, в котором функция убывает быстрее всего. Затем мы движемся по этому напралению до тех пор, пока функция не примет наименьшее возможное значение. Потом мы повторяем процесс уже из этой точки. На самом деле, выбор α_n бывает самый разный; например, можно тупо выбрать $\alpha_n = \varepsilon$ для маленького ε, или искать всякие другие разумные условия. От выбора α_n очень многое зависит и как раз в нем-то и запрятана возможность проявлять ваш технический профессионализм. Давайте разбирем стандартный пример.

1. (3) Пусть $x \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\nabla f(x) \neq 0$. Напомним, что производной функции $f(x)$ по направлению $v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\| = 1$, называется
$$\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$
Покажите, что $\frac{\partial f(x)}{\partial v} = \nabla f(x) \cdot v$. Выведите отсюда, что $\frac{\partial f(x)}{\partial v}$ минимально тогда и только тогда, когда v сонаправлен с $-\nabla f(x)$.

2. (10) Предположим, что f непрерывно дифференцируема и $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$. Предположим, что у f имеется единственная минимальная точка $x_* \in \mathbb{R}^d$. Покажите, что $x_n \to x_*$ для любого x_0.

3. (5) Предложите пример таких $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и f, что $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$, f имеет конечное число стационарных точек (т.е. точек, где $\nabla f(x) = 0$) и последовательность x_n имеет предел, не совпадающий ни с одним локальным минимумом f.

   Вспомните жизненную задачу (про предсказание стоимости квартиры). В той задаче мы минимизировали функцию вида $f(x) = \|Ax - b\|^2$, где A — матрица размера $m \times d$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $m \geq d$ (проверьте, это та же задача с точностью до замены обозначений). Положим $H = A^T A$ и $y = A^T b$. Заметим, что H — квадратная матрица $d \times d$; будем предполагать, что $\det H \neq 0$. Вспомните, что мы доказывали, что f имеет единственный минимум в точке $x_* = H^{-1} y$.

4. (10) Положим $g_n := \nabla f(x_n)$. Покажите, что
$$f(x_{n+1}) - f(x_*) = \left(1 - \frac{\|g_n\|^4}{(g_n^T H g_n)(g_n^T H^{-1} g_n)}\right)(f(x_n) - f(x_*)). \tag{5}$$

   Теперь, для того, чтобы оценить скорость, с которой сходится градиентный спуск, достаточно оценить величину $\left(1 - \frac{4\|g_n\|^4}{(g_n^T H g_n)(g_n^T H^{-1} g_n)}\right)$ сверху. Мы докажем, что
$$\left(1 - \frac{\|g_n\|^4}{(g_n^T H g_n)(g_n^T H^{-1} g_n)}\right) \leq \left(\frac{\lambda_d - \lambda_1}{\lambda_d + \lambda_1}\right)^2, \tag{6}$$
где λ_1, λ_d — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы H. Как будет видно из нижеследующего, эта оценка точна.

   ---

5. (5) Покажите, что найдется ортонормированный базис $v_1, v_2, \ldots, v_d$ в $\mathbb{R}^d$ и набор чисел $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$ такие, что $Hv_i = \lambda_i v_i$. Выведите из этого, что
$$\frac{\|g_n\|^4}{(g_n^T H g_n)(g_n^T H^{-1} g_n)} = \frac{(a_1^2 + \cdots + a_d^2)^2}{(\lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_d a_d^2)(\lambda_1^{-1} a_1^2 + \cdots + \lambda_d^{-1} a_d^2)}, \tag{7}$$
где $g_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_d v_d$.

6. (7) Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{1}{t}$. Заметим, что φ выпуклая при $t > 0$, в частности,
$$\varphi(\xi\lambda_1 + (1 - \xi)\lambda_d) \leq \xi\varphi(\lambda_1) + (1 - \xi)\varphi(\lambda_d)$$
для любых $\lambda_1, \lambda_d > 0$ и $0 \leq \xi \leq 1$. Покажите, что минимум выражения
$$\frac{\varphi(\xi\lambda_1 + (1 - \xi)\lambda_d)}{\xi\varphi(\lambda_1) + (1 - \xi)\varphi(\lambda_d)}$$
по всем $0 \leq \xi \leq 1$ при фиксированных λ_1, λ_d равен $\frac{4\lambda_1\lambda_d}{(\lambda_1 + \lambda_d)^2}$.

7. (7) Теперь покажите, что минимум выражения

$$\frac{\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i\lambda_i\right)}{\sum_{i=1}^{d}\xi_i\varphi(\lambda_i)}$$

при фиксированных λ_i по всем неотрицательным $\xi_1,\dots,\xi_d$ таким, что $\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i=1$, равен $\frac{4\lambda_1\lambda_d}{(\lambda_1+\lambda_d)^2}$, как и в предыдущей задаче.

Hint: обратите внимание, что $\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i\lambda_i$ — по-прежнему точка из отрезка $[\lambda_1,\lambda_d]$, то есть точка вида $\xi'\lambda_1+(1-\xi')\lambda_n$. Вероятно, вам поможет графическое изображение происходящего.

8. (5) Используйте предыдущее упражнение и (7), чтобы доказать (6) (положите $\xi_i=\frac{a_i^2}{\sum_{j=1}^{d}a_j^2}$).

9. (1) Выведите из (5) и (6), что

$$f(x_n)-f(x_*)\le\left(\frac{\lambda_d-\lambda_1}{\lambda_d+\lambda_1}\right)^{2n}(f(x_0)-f(x)). \tag{8}$$

Еще пара замечаний. Мы выяснили, что метод градиентного спуска сходится экспоненциально с показателем, зависящим от собственных чисел матрицы H. На самом деле, это довольно хреновая оценка — скажем, если матрица H случайна, то отношения самого большого и самого маленького собственных чисел весьма велико с большой вероятностью и, как следствие, априорная оценка, которую мы получили, гарантирует только очень медленную сходимость. В интернетах пишут, что это наглядно демонстрирует несостоятельность метода в таком виде и надо выбирать α_n как-то еще. Например, известно, что можно выбрать α_n так, чтобы скорость сходимости была суперэкспоненциальная (точнее, имела бы место асимптотика вида c^{-c^n}).

ДЗ 6. Кратные интегралы-1. Дедлайн: 18 ноября 14:00

1. Вычислите (полезно иногда делать замену переменной):

$$\text{А) (6)} \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy, \quad \text{где } \Omega = \{ax \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2ax, y \geqslant 0\}, \quad a > 0.$$

$$\text{А) (6)} \iint\limits_{\Omega} (x^2 - y^2) \sin \pi (x-y)^2\,dx\,dy, \quad \text{где } \Omega = \{|y| \leqslant x \leqslant 1 - |y|\}.$$

$$\text{Б) (10)} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$$

2. (7) Пусть функция $f(t)$ — непрерывна на $(0, +\infty)$. Докажите, что

$$\int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^a f(t)(a-t)^{n-1}\,dt$$

3. (7) На отрезке $[0, a]$ случайным образом независимо выбираются 3 числа. Какова вероятность того, что они являются длинами некоторого треугольника?

4. (10) На окружности радиуса R случайным образом независимо выбираются 2 точки. Найдите среднее значение L длины соединяющей их хорды.

Для желающих

5. А) (10) Вычислите объем n-мерного шара $B_n(r)$ радиуса r.
   Hint: есть 2 пути: либо перейти в сферические координаты и честно посчитать интеграл, либо выразить индуктивно объем шара $B_n(r)$ через $B_{n-1}(r)$.

   Б) (3) Вычислите площадь n-мерной сферы $S_n(r)$.
   Определим площадь сферы как предел:

$$\lambda_{n-1}(S_n(r)) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_n(B_n(r+\varepsilon)) - \lambda_n(B_n(r))}{\varepsilon}.$$

   В) (7) Пусть n-мерный арбуз — это шар B_1 радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$, а его корка толщины h — это $B_1 \setminus B_{1-h}$.
   Докажите, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N :$
   1) $\exists h_n < \varepsilon$
   2) λ_n(арбузной корки толщины h_n) $\geqslant (1-\varepsilon)\lambda_n$(арбуза)
   Тем самым получаем, что для n-мерных арбузов бОльшая часть массы сосредоточена в тоненькой корке!

ДЗ 7. Кратные интегралы-2: большая подготовка к КР 2. Дедлайн: 2 декабря 14:00

Интегрирование по областям в $\mathbb{R}^3$

1. (8) Средним функции f по области G называется величина $|G|^{-1}\int_G f$, где $|G|$ — объем G. Найдите среднее значение функции $f = e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$ по области $G = \{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1\}$, $a, b, c > 0$.

2. Вычислите интегральчик-интеграл $\int\limits_X f\,d\lambda_3$, если

   А) (7) $f = \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\quad X = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \mid\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0\}$.

   Б) (7) $f = y$, множество X ограничено поверхностями $|x| \le z$, $0 \le z \le 1$, $z \le y$, $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

   В) (7) $f = \frac{1}{(x+y)(x+y+z)}$, $\quad X = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ \mid\ 1 < x < 2,\ 1 < x+y < 3,\ 1 < x+y+z < 5\}$

3. Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_{[0,1]^2} \frac{d\lambda_2}{1-xy}$, где $[0,1]^2$, как всегда, обозначает квадрат, а λ_2 — мера Лебега на плоскости.

   А) (5) Покажите, что $I < \infty$, иными словами, функция $\frac{1}{1-xy}$ суммируема на множестве $[0,1]^2$.

   Б) (7) Запишите I, как повторный интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}$ и, интегрируя его последовательно, покажите, что $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

   Замечание: кое-что надо будет разложить в ряд.

   В) (10) Сделайте замену переменных $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ и запишите I, как повторный в новых координатах. Интегрируя последовательно, вычислите I и покажите, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Интегрирование по $\mathbb{R}^n$.

1. Пусть $p > 0$ — вещественное число. Вычислите $\displaystyle\int_{I_n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p d\lambda_n$, где

   А) (7) $I_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid\ x_i \ge 0,\ \sum x_i \le 1\}$ — пирамида,

   Б) (7) $I_n = [0,1]^n$ — куб.

2. А) (7) Пусть A — матрица $n \times n$, причем $\mathrm{Tr}A = 0$. Покажите, что

$$\int_{B_1}\langle Ax, x\rangle\,d\lambda_n = 0,$$

   где B_1 — единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

   Б) (15) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция и $|B_r(x)|^{-1}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy = f(x)$ для всяких $x \in \mathbb{R}^n$ и $r > 0$ (как обычно, $B_r(x)$ обозначает шар радиуса r с центром в x, а $|B_r(x)|$ — его объем). Покажите, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}(x) = 0.$$

3. (7) При каком $\alpha > 0$ фигура $\Phi = \{(x_1,\dots,x_n) \ \mid\ x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \le x_n^{-\alpha},\ x_n \ge 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ имеет конечную меру Лебега?

Дифференцирование интеграла по параметру.

1. (10) Докажите, что функция

$$\Psi(x,y) = \int\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} \ln((x-u)^2+(y-v)^2)\,du\,dv$$

принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^2)$ (то есть частные производные первого порядка существуют и непрерывны).

2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная функция. Пусть $H = \{(x,y) \mid y > 0\}$ — верхняя полуплоскость, рассмотрим $F : H \to \mathbb{R}$, заданную правилом

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{yf(t)\,dt}{(x-t)^2+y^2}.$$

А) (10) Покажите, что F бесконечно дифференцируема в H и удовлетворяет там уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} = 0.$$

Б) (10) Покажите, что $\lim\limits_{y\to 0+} F(x,y) = f(x)$ для любого x.

3. Докажите, что следующие тождества верны для любого $\alpha \in \mathbb{R}$:

А) (7) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2(x) + \alpha^2\cos^2(x))\,dx = \pi\ln\Big(\frac{|\alpha|+1}{2}\Big)$

Б) (7) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sign}(\alpha)\cdot\ln(1+|\alpha|)$

В) (10) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2\alpha x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$

Указание: бывает полезно дифференцировать интеграл по параметру.

4. (10) Вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Мысли вслух: что бы такое продифференцировать, чтобы получить подинтегральное выражение?...

Сведение интегралов к Г и В.

1. Выразить нижеследующие интегралы через В и Г функции:

А) (7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^\alpha}}, \quad \alpha > 0$

Б) (7) $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^p x}{1+\cos x}\,dx, \quad p > 1$

В) (7) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{x^p}\,dx, \quad \alpha > 0,\ 0 < p < 2$

Подсказка: $x^{-p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty t^{p-1}e^{-xt}\,dt$

Доп ДЗ по всем темам

Непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных.

1. При каких α функция f дифференцируема в точке $(0,0)$, если f задается правилом

А) (7) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^6+y^6)^\alpha}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$

Б) (7) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{xy}{|x|+|y|}\right)}{1+|x|^\alpha}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x=y=0, \end{cases}$

В) (7) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|^\alpha+|y|^{4\alpha}}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

2. Предложите функцию $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такую, что для всякого $v \in \mathbb{R}^2$

   А) (7) производная по направлению $\partial_v f(0,0)$ существует, однако f не дифференцируема в $(0,0)$;

   Б) (8) $\partial_v f(0,0) = 0$, однако f не дифференцируема в $(0,0)$.

Дифференцируемость сложной и неявной функции нескольких переменных.

3. Найдите второй дифференциал функции u, заданной неявно уравнением:

А) (5) $x+y+u=e^u$

Б) (7) $\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)$

Экстремумы функций нескольких переменных

4. (8) Найдите локальные экстремумы функции $u(x,y) = \sin^3(x)\sin^3(y) + \cos^3(x)\cos^3(y)$ в квадрате $(x,y) \in (-1,1)^2$.

5. Пусть A — симметричная матрица $n \times n$. Найдите минимум и максимум функции $f(x) = \langle Ax, x\rangle$ при условии $|x| = 1$, если

А) (10) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 0, & i=j \end{cases}$

Б) (10) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ или } \min(i,j)=1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

6. (8) Найдите глобальный максимум и глобальный минимум функции $x_1x_2\cdots x_n \sin(x_1x_2\cdots x_n)$ при условии $x_1+\cdots+x_n = 10n$ и $x_i \geq 1$.

7. Пусть u — функция, заданная в окресности $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая уравнению

$$u^2 + e^{xy}u - x^2y^2 = 0.$$

   А) (5) Покажите, что u дифференцируема в точке $(0,0)$ и ее градиент равен нулю.

   Б) (5) Является ли $(0,0)$ экстремумом функции u?

8. (10) Найдите глобальный максимум и глобальный минимум функции $f(x,y,z) = e^xy^2z^3$ при условии $x^6+y^6+z^6 = 6$.

9. (8) Найдите расстояние от точки $(0,3,3)$ до кривой $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=1$.

10. (7) Найдите наименьшую площадь поверхности, которую может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен V.

11. (10) В результате последовательных центральных соударений абсолютно упругих шаров с массами $M > m_n > m_{n-1} > \ldots > m_1 > m$ тело с массой m приобретает скорость

$$v = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{M}{m_n+M} 2^{n+1}V$$

где V — скорость тела с массой M. Как следует выбрать массы $m_1, \ldots, m_n$, чтобы тело массы m приобрело наибольшую скорость? Найдите значение наибольшей скорости.

Теория меры

12. (8) Множество $A \subset [0,1]$ называется нигде не плотным, если $\forall a < b$ $\operatorname{Int}((a,b) \setminus A) \neq \varnothing$. Покажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует нигде не плотное множество A такое, что $\lambda_1(A) \geq 1-\varepsilon$. *Hint:* вспомните, что Канторово множество нигде не плотно! Но это не ответ...

13. (10) Пусть μ^* — внешняя мера на 2^X, полученная из меры μ на полукольце $\mathcal{P}$, причем $\mu^*(X) < \infty$. Покажите, что A измеримо относительно μ тогда и только тогда, когда

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu^*(X).$$

14. (10) Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и

$$n(c) = \#\{x \in [0,1] \mid f(x) = c\}.$$

Покажите, что $n(c)$ — измеримая функция.

Кратные интегралы

15. Посчитайте интегралы $\iint\limits_A f(x)d\lambda(x)$:

А) (2) $f(x,y) = x\operatorname{sh}(y) + y\operatorname{ch}(x), \quad A = [0,e]^2$
Б) (4) $f(x,y) = xy, \quad A = \{x^2 + y^2 \le 25, 3x + y \ge 5\}$
В) (4) $f(x,y) = \operatorname{sign}(2a - 2x - y), \quad A = [0,a]^2$
Г) (5) $f(x,y) = x^2y^2, \quad A = \{y > 0, xy < 1, x^2 - 3xy + 2y^2 < 0\}$
Д) (5) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad A = \{ax \le x^2 + y^2 \le a(x + \sqrt{x^2+y^2})\}$

16. (8) Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$. Докажите, что

$$\int\limits_0^a x_1\,dx_1 \int\limits_0^{x_1} x_2\,dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-2}} x_{n-1}\,dx_1 \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\int\limits_0^a (a^2 - t^2)^{n-1} f(t)\,dt$$

17. (8) Найдите объем n-мерного конуса $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2 \le x_n^2$, $0 \le x_n \le H$.

18. А) (4) Вычислите $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2}\,d\lambda_n$

Б) (4) Пусть A — положительно определенная симметричная $n \times n$ матрица. Покажите, что функция $e^{-\langle Ax,x\rangle}$ суммируема на $\mathbb{R}^n$ и найдите

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle}\,d\lambda_n.$$

19. (7) Найдите $\int_{I_n} \sin x_1 \sin(x_1 + x_2) \ldots \sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,d\lambda_n$, если $I_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^n x_i \le 1\}$.

Интегралы с параметром

20. Докажите тождества:

А) (10) $$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Б) (8) $$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\cos(\lambda x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}\Big)$$

Гамма и бета функции

21. (7) Вычислите $\int_0^1 \ln(\Gamma(x))\,dx$

22. (7) Докажите, что

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

23. Выразите через Γ и B-функции:

А) (7) $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2a-1}(x)\cos^{2b-1}(x)}{(\alpha^2\sin^2(x) + \beta^2\cos^2(x))^{a+b}}\,dx, \quad a,b,\alpha,\beta > 0$$

Б) (7) $$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x-2)^2}$$

В пункте Б) также доведите интеграл до ответа без гамма-функции.

3 Контрольные работы

Тренировочное задание перед КР 1

1. (7) При каких a, b функция $f(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $(0;0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} (x|y|^a + y|x|^b)/(x^4+y^2), & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

2. (7) Найдите локальные экстремумы функции $f = (x+y+z)^7 - x^6 - y^6 - z^6$. Для каждой эктремальной точки требуется указать, является ли она локальными максимумом, или минимумом.

3. (7) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+1}}$ при условии, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = S > 0$ и $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.

4. (7) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Лебегу функция и $\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_1 = 1$. Покажите, что для всякого $a \in [0,1]$ найдется измеримое $E \subset \mathbb{R}$ такое, что $\int\limits_{E} f\, d\lambda_1 = a$.

КР 1 по матанализу. 29.10.2019

1. При каких a функция $f(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $(0;0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^4+y^4)^a \log \frac{1}{|x|+|y|}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

2. Найдите локальные экстремумы функции $f = x^2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4$. Для каждой эктремальной точки требуется указать, является ли она локальным максимумом или минимумом.

3. Найдите максимум и минимум выражения $\cos(x_1) + \cos(x_2) + \cos(x_3) + \cos(x_4)$ при условиях $x_1 + \cdots + x_4 = 2\pi$, $0 \leq x_1, \ldots, x_4$.

4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция и положим

$$\mathrm{DC}(f) = \{x \mid f \text{ разрывна в } x\}.$$

Покажите, что $\mathrm{DC}(f)$ измеримо.

Тренировочное задание перед КР 2

1. (7) Вычислите $\int_X f$, если $f = x + y + z$ и X ограничено поверхностями $|x + y| = z(x^2 + 1)$, $|x| = z^2 + 1$, $z = 0$, $z = 1$.

2. (7) Обозначим через $B_1^{(n)}$ единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и пусть $V_n = \lambda_n(B_1^{(n)})$. Вычислите

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{V_n} \int_{B_1^{(n)}} |x|^n \, d\lambda_n(x)$$

3. Докажите, что следующие равенства выполняются для всех $\alpha \in \mathbb{R}$:

   А) (7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$ $\left[\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\right]$

   Б) (7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{sign}(\alpha) \cdot e^{-|\alpha|}$.

4. Следующие интегралы нужно выразить через Γ - функцию:

   А) (7) $\int_0^1 x^\alpha (1 - x^\beta)^\gamma \, dx, \quad \alpha > -1,\ \beta > 0,\ \gamma > -1$

   Б) (7) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^\beta}\, dx, \quad 0 < \alpha < \beta$

КР 2 по матанализу. 10.12.2019

1. Вычислите интеграл $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} |x + y| e^{2xy-z^2} \, dx\, dy\, dz$.

2. Пусть $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} \leq 1\}$. Вычислите

$$\int_A \exp(-5 \sum_{k=1}^n x_k)\, d\lambda_n(x)$$

.

3. Пусть $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Вычислите интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{\mathrm{arctg}(ax)}{x(x^2 + b^2)} dx$.

4. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int\limits_0^1 \frac{x^n\, dx}{(1-x^3)^{\frac{n-1}{n}}}$.