Практические занятия по математическому анализу и ТФКП
2 курс «Современное программирование»
IV семестр, весна 2020

Содержание

1 Материалы занятий

Занятие 1, 13.02.2020. Формула Грина. Гармонические функции в $\mathbb{R}^2$.

Криволинейные интегралы. Формула Грина.

1. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma y\,dx + x\,dy$ по кривой γ с началом $A(0,0)$ и концом $B(1,1)$, если:

   А) γ — отрезок AB;

   Б) γ — дуга параболы $y = x^2$;

   В) γ — дуга окружности радиуса 1 с центром в точке $(1,0)$.

   Формула Грина — это частный случай формулы Стокса (для 1-формы в $\mathbb{R}^2$):

$$\int P\,dx + Q\,dy = \int \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy \tag{1}$$

   Используя формулу Грина можно связать интеграл от оператора Лапласа по области с интегралом от нормальной производной по границе. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ — замкнутая, несамопересекающаяся кривая, ориентированная против часовой стрелки. Предположим к тому же, что γ имеет натуральную параметризацию, то есть $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ — вектор длины один. Нормалью к γ в точке $\gamma(t)$ называют вектор $n(t) = (y'(t), -x'(t))$ (попробуйте представить себе картинку!).

2. А) Пусть γ такая, как выше, и Ω — область, ограниченная γ. Пусть $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Положим

$$d^*u = u_x dy - u_y dx.$$

   Покажите, что

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_\gamma d^*u.$$

   Б) Используя формулу Грина выведете, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_{\Omega} \Delta u\,dx\,dy$$

   В) и еще что

$$\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\limits_{\Omega} v\Delta u\,dx\,dy + \int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u\,dx\,dy.$$

   Г) Используя формулу выше покажите, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Big(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big)\,dS = \int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\,dx\,dy.$$

Гармонические функции в $\mathbb{R}^2$.

Напутствие. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область (открытое множество) и $u \in C^2(\Omega)$. Оператор Лапласа определяется так:

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy}.$$

Функция u называется гармонической, если $\Delta u \equiv 0$; тогда говорят, что u удовлетворяет уравнению Лапласа. Гармонические функции возникают во многих областях математики — начиная с классической матфизики и заканчивая комбинаторикой, сюда же относится современная теория вероятностей. С другой стороны, многие свойства гармонических функций несложно выводятся, образуя красивую и доступную теорию. В размерности 2 с каждой гармонической функцией связана голоморфная — неплохой пример естественного приложения ТФКП. Гармонические функции можно рассматривать во многих разных контекстах (на графах, на многообразиях...), мы немного коснемся случая $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{Z}^2$.

Мы будем использовать z для обозначения комплексной координаты на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Вещественные координаты x, y связаны с z соотношением $z = x + iy$.

1. Целью этой задачи является показать следующий замечательный факт (**теорема о среднем**): значение грамонической функции в каждой внутренней точке области есть среднее по любому шарику с центром в данной точке (см. формулу (2)).

   А) Проверьте, что функция $u(z) = \log|z|$ является гармонической функцией на $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   Б) Пусть $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ и $u : D_R(0) \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция. Пусть $0 < r < R$. Покажите, что
   $$\int_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0.$$

   В) Выведите из предыдущих пунктов, что для всяких $R > r_1 > r_2 > 0$ и всякой гармонической функции $u : D_R(0) \to \mathbb{R}$ выполняется
   $$\frac{1}{2\pi r_1} \int_{|z|=r_1} u\, dS = \frac{1}{2\pi r_2} \int_{|z|=r_2} u\, dS.$$

   Г) Покажите, что
   $$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|z|=\varepsilon} u\, dS = u(0).$$

   Д) Теперь пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $z_0 \in \Omega$. Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция. Пусть $r > 0$ таково, что $D_r(z_0) \subset \Omega$
   $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} u\, dS.$$

   Е) В условиях предыдущего пункта выведите, что
   $$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D_r(z_0)} u\, d\lambda_2. \tag{2}$$

2. **Принцип максимума для гармонической функции:**

   А) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция. Предположим, u достигла своего максимума в точке $x_0 \in \Omega$. Покажите, что $u \equiv \mathrm{const}$.

   Б) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченное открытое множество и $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Предположим, что u гармонична в Ω. Покажите, что
   $$\max_{z \in \overline{\Omega}} |u(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |u(z)|.$$

   С помощью принципа максимума можно показать, что гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе. А именно, верна следующая теорема единственности:

   В) Пусть $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ — две функции, удовлетворяющие условиям предыдущего пункта. Предположим, что $u|_{\partial\Omega} \equiv v|_{\partial\Omega}$. Покажите, что $u(z) = v(z)$ для всякого $z \in \Omega$.

3. **Теорема Лиувилля**: Пусть $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — ограниченная гармоническая функция. Покажите, что $u \equiv \mathrm{const}$.

Занятие 2, 20.02.2020. Дискретно-гармонические функции.

Концепцию дискретной гармоничности исторически связывают с законами Кирхгофа, вернее, с первым из них, который гласит, что сумма токов, направленых к узлу электрической цепи, равна нулю. Пусть G — это некоторый конечный граф (суть электрическая цепь), давайте всегда предполагать, что G связный; каждому ориентированому ребру e сопоставим ток I_e, который через него проходит, так, что $I_{\overline{e}} = -I_e$. Тогда для каждой вершины должно выполняться

$$\sum_{e:t(e)=v} I_e = 0.$$

Пусть теперь U — потенциал электрической цепи, то есть $U : V(G) \to \mathbb{R}$ — такая функция, что для любых смежных вершин v, w выполняется

$$U(v) - U(w) = I_{wv},$$

(для простоты будем считать, что все ребра имеют единичную проводимость). Тогда закон Кирхгофа гласит, что

$$\sum_{w\sim v}(U(v) - U(w)) = U(v)\deg v - \sum_{w\sim v} U(w) = 0. \tag{3}$$

1. Определим матрицу Δ, занумерованную вершинами G, следующим образом:

   $$\Delta = D - A,$$

   где D — диагональная матрица, у которой $D(v, v) = \deg v$, а A — матрица смежности G. Покажите, что если воспринимать функцию U, как вектор из $\mathbb{R}^{V(G)}$, составленный из значений U, то уравнение (3) соответствует

   $$(\Delta U)(v) = 0.$$

   Если это условие в вершине v выполняется, то будем говорить, что U дискретно-гармонична в v, а матрицу Δ называть комбинаторным оператором Лапласа. Обратите внимание, что уравнение (3) очень напоминает теорему о среднем для гармонических функций.

2. Правило Кирхгофа позволяет решать следующую задачу: предположим, что есть некоторое выделенное подмножество вершин $\partial G \subset G$, назовем их граничными (в нашей физической метафоре это будут входы и выходы электрической цепи). Остальные вершины будем называть внутренними и обозначать $\operatorname{Int} G$. Пусть нам известен потенциал на входе, то есть имеется некоторая функция $f : \partial G \to \mathbb{R}$ такая, что $U|_{\partial G} = f$. Поскольку U удовлетворяет правило Кирхгофа внутри цепи, проблема поиска U во внутренних узлах сводится к дискретной версии задачи Дирихле для оператора Лапласа:

   $$\begin{cases} \Delta U|_{\operatorname{Int} G} = 0, \\ U|_{\partial G} = f. \end{cases}$$

   Это, по сути, линейная система уравнений, покажем, что она невырождена, если $\partial U \neq \varnothing$ и имеет одномерное ядро в противном случае.

   Давайте для простоты говорить, что $U : V(G) \to \mathbb{R}$ — гармоническая, если $\Delta U|_{\operatorname{Int}G} = 0$.

   А) Докажите **принцип максимума**: если $U : V(G) \to \mathbb{R}$ гармоническая, то $\max U$ достигается на ∂G.

      Замечание: покажите, что U может иметь нестрогие локальные максимумы внутри G и не быть при этом постоянной.

   Б) Покажите, что если $\partial G \neq \varnothing$, то задача Дирихле для дискретного оператора Лапласа имеет единственное решение для любых граничных данных f. Покажите, что если $\partial G = \varnothing$, то единственная гармоничная функция на G — это постоянная функция, иными словами, $\dim\ker\Delta = 1$.

3. Первый закон Кирхгофа означает по сути, что ток, идущий через узлы цепи, является потоком. Предположим, что G — планарный граф и обозначим через G° двойственный граф. Пусть γ — простой цикл на G°, мы будем думать про γ, как про последовательность ребер G, которые он пересекает, то есть $\gamma = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда суммарный поток, который проходит через γ, должен равняться нулю: сколько внутрь γ затекло, столько оттуда и вытекло. Формально,

   $$\sum_{i=1}^{n} I_{e_i} = 0, \tag{4}$$

   где e_i ориентируется так, чтобы оно смотрело наружу относительно γ.

   Теперь попробуем это перевести на более математический язык. Скажем, что 1 - форма на графе G, это функция ω на ориентированных ребрах, причем $\omega(\overline{e}) = -\omega(e)$. Дифференциал функции тогда определяется как $dU(vw) := U(w) - U(v)$. Ребро e_i естественно понимать, как нормаль к γ, тогда $dU(e_i)$ — это дискретная версия $\frac{\partial U}{\partial n}$.

А) Докажите, что для всякой $U : V(G) \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} dU(e_i) = \sum_{v \in \operatorname{Int} \gamma} \Delta U(v)$$

и выведите отсюда (4).

Б) Покажите, что для всяких $U, V : V(G) \to \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} V(t(e_i)) dU(e_i) = -\sum_{v \in \operatorname{Int} \gamma} V(v) \Delta U(v) + \sum_{e \in \gamma \cup \operatorname{Int} \gamma} dV(e) dU(e); \tag{5}$$

тут $t(e_i)$ обозначает конец e_i. Обратите внимание, что $dV(e)dU(e)$ не зависит от ориентации ребра, так что определено на неорентированных ребрах.

4. Из вышеописанных комбинаторных наблюдений, изначально мотивированных физикой, родилась симпатичная математика. Я говорю о так называемой matrix tree theorem, давайте ее сформулируем и докажем. Предположим, что граница G состоит из единственной вершины v_0, то есть $\partial G = \{v_0\}$, и будем рассматривать только те функции на графе, которые равны нулю в v_0, скажем, пусть

$$\mathcal{V}_0 = \{U : V(G) \to \mathbb{R} \ \mid \ U(v_0) = 0\}.$$

Определим оператор $\Delta_0 : \mathcal{V}_0 \to \mathcal{V}_0$ правилом

$$(\Delta_0 U)(v) = \begin{cases} (\Delta U)(v), & v \neq v_0, \\ 0, & v = v_0. \end{cases}$$

Поскольку задача Дирихле имеет единственное решение, оператор Δ_0 имеет тривиальное ядро, стало быть, $\det \Delta_0 \neq 0$. Оказывается, $\det \Delta_0$ имеет красивую интерпретацию в терминах графа G:

Теорема 1 (matrix-tree theorem)**.** *Определитель* $\det \Delta_0$ *равен числу остовных деревьев графа* G*.*

А) Зафиксируем любую ориентацию на ребрах $E(G)$, если $e \in E(G)$, то через $\vec{e}$ будем обозначать соответствующее ориентированное ребро. Оператор d_0 на $\mathcal{V}_0$, заданный

$$(d_0 U)(e) := (dU)(\vec{e}).$$

Используя формулу (5) для функций $U, V \in \mathcal{V}_0$ и цикла γ, отделяющего v_0 от остальных вершин графа, покажите, что $\Delta_0 = d_0^T d_0$. (*Замечание:* утверждение $\Delta_0 = d_0^T d_0$ является локальным (для того, чтобы его проверить, достаточно рассмотреть произвольную вершину и ее окрестность), его легко проверить напрямую).

Б) Пусть $n < m$ и X, Y — матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$. Вспомните формулу Коши-Бине:

$$\det XY = \sum_{S \subset [m], \ |S| = n} (\det X^S)(\det Y_S).$$

В) Про оператор d_0, действующий на пространстве $\mathcal{V}_0$, естественно думать, как про матрицу размера $|E(G)| \times |V(G) \setminus \{v_0\}|$. Имеем

$$(d_0)_{e,v} = \begin{cases} 1, & v = t(\vec{e}), \\ -1, & v = o(\vec{e}), \\ 0, & v \not\sim e. \end{cases}$$

Пусть $S \subset E(G)$, причем $|S| = |V(G) \setminus \{v_0\}|$. Покажите, что

$$(\det(d_0)_S)^2 = \begin{cases} 1, & S \text{ — это ребра остовного дерева}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и докажите теорему.

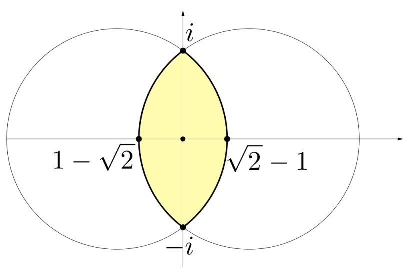
Занятие 3, 27.02.2020. Конформные отображения в картинках. Преобразование Мебиуса.

Напоминание о комплексных числах. Мы будем использовать стандартные обозначения $z = x + iy$, $\Re z = x$ и $\mathrm{Im}\, z = y$, а также $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Сопряжение определяетя как $\overline{z} = x - iy$.

1. Покажите, что $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z||w|$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
2. Любое комплексное число можно записать в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, при этом φ называют аргументом z. Такая запись называется *полярной записью*. Очевидно, φ определено только с точностью до 2π.
   - А) Запишите в полярной записи числа $z = i$, $z = 1 + i$, $z = -1$, $z = 2 - i$.
   - Б) Покажите, что в плоскости с разрезом $\mathbb{C} \setminus \{x \geq 0\}$ функцию $z \mapsto \varphi(z)$ можно определить так, чтобы она была непрерывной.

Преобразованием Мебиуса называется отображение $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Будем всегда требовать, чтобы $ad - bc \neq 0$.

1. Среди преобразований Мебиуса выделяют сдвиг $z \mapsto z + a$, растяжение $z \mapsto \lambda z$ и "инверсию" $z \mapsto \frac{1}{z}$.
   - А) Покажите, что настоящая инверсия — это $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$. Покажите, что она переводит окружности и прямые в окружности и прямые. Какие окружности перейдут в прямые и какие прямые — в окружности?
   - Б) Покажите, что любое преобразование Мебиуса — это композиция вышеописанных трех и заключите, что преобразования Мебиуса переводят прямые и окружности в прямые и окружности.
2. Двойным отношением точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ называют выражение $\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}$.
   - А) Покажите, что преобразования Мебиуса сохраняют двойные отношения.
   - Б) Покажите, что с помощью преобразований Мебиуса можно перевести любые три точки в любые три точки (постройте преобразование Мебиуса, которое переводит z_1, z_2, z_3 в $\infty, 0, 1$).
   - В) Заключите, что преобразование Мебиуса однозначно характеризуется своими значениями в любых трех точках.
   - Г) Покажите, что действие группы дробно-линейных преобразований на обобщенных окружностях *транзитивно*, т.е. любую обобщенную окружность можно перевести в обобщенную окружность.
3. Преобразования Мебиуса сохраняют углы: отметьте это для себя!
4. Рассмотрим преобразование $w(z) = \dfrac{z+i}{z-2i}$.
   - А) Какие прямые остаются прямыми при этом преобразовании?
   - Б) Куда перейдет ось ординат? А ось абсцисс?
   - В) Найдите образы следующих обобщенных окружностей
     - i. прямой $y = x$
     - ii. прямой $y = x + 2$
     - iii. окружности $x^2 + (y-4)^2 = 1$
     - iv. окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$
5. Постройте преобразование Мебиуса, переводящее:
   - А) Верхнюю полуплоскость $\{z \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ в единичный диск $\{z \ : \ |z| \leq 1\}$
   - Б) Полуокружность $\{z \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 0, \ |z| \leq 1\}$ в угол $\{z \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 0, \ \Re z \geq 0\}$.
6. Куда отображение $z \mapsto z^2$ переводит
   - А) угол $\{z \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 0, \ \Re z \geq 0\}$,
   - Б) угол $\{z \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 0, \ \Re z \leq 0\}$,
7. Предложите конформное преобразование, переводящее:
   - А) полуокружность в полуплоскость
   - Б) луночку в полуплоскость (на рис. слева желтая)



Арсенал конформных преобразований:

1. Преобразования Мебиуса:
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc \neq 0.$$
Действуют из $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ в $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, переводят любые три точки в любые три точки, а также окружности и прямые в окружности и прямые.

2. Степенные отображения: $z \mapsto z^n$ и $z \mapsto z^{1/n}$. Извлечение корня можно задать однозначно, если в области нету контура, обходящего ноль.

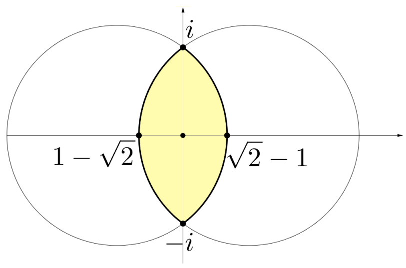
3. Эспонента и логарифм. Логарифм можно задать однозначно, если в области нету контура, обходящего ноль.

Занятие 4, 05.03.2020. Конформные отображения в картинках. Степень и корень.

Преобразованием Мебиуса называется отображение $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Будем всегда требовать, чтобы $ad-bc \neq 0$.

Нули производной и углы. По определению, голоморфная функция f на Ω — это такая функция, что $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} f = 0$, а конформное преобразование — это отображение, сохраняющее углы. Конформное преобразование всегда голоморфно или антиголоморфно ($z \mapsto \overline{z}$ — тоже конформно), а если f голоморфна и $f'(z_0) \neq 0$, то f является конформным преобразованием в некоторой окрестности точки z_0. В тех же точках, где $f'(z) = 0$, отображение f изменяет углы в некоторое целое число раз.

1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Куда отображение $z \mapsto z^n$ переводит
   А) угол $\{z \ : \ \operatorname{Im} z \geq 0, \ \Re z \geq 0\}$,
   Б) угол $\{z \ : \ \operatorname{Im} z \geq 0, \ \Re z \leq 0\}$,
2. Предложите конформное преобразование, переводящее:
   А) полуокружность в полуплоскость
   Б) луночку в полуплоскость (на рис. справа желтая)



Корень. Любое комплексное число можно записать в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ и φ называется аргументом z, мы будем часто писать $\varphi = \arg z$.

1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область. Чему равен $\arg z_0$, если
   А) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it, \ t \geq 0\}$, $\arg 1 = 0$ и $z_0 = -1$ или $z_0 = -i$ или $z_0 = 1+i$?
   Б) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{t, \ t > 0\}$, $\arg i = -\frac{3\pi}{2}$ и $z_0 = -1$ или $z_0 = -i$ или $z_0 = 1+i$?
   В) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it + 2t, \ t > 0\}$, $\arg(-1) = -\pi$ и $z_0 = -1$ или $z_0 = i$ или $z_0 = 1+i$?
2. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Определим $z^a := |z|^a e^{ia \arg z}$. Как мы видели выше, вид этой функции зависит от области определения. Куда $z \mapsto \sqrt{z}$ переведет области выше? А $z \mapsto \sqrt[3]{z}$?
3. Пусть $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Проведите разрез или несколько разрезов так, чтобы дополнение к ним было связно, а $\arg w(z)$ на этом дополнении был определен однозначно, если
   А) $w(z) = z - 1$ Б) $w(z) = z + 1$ В) $w(z) = z^2 - 1$
4. Пусть $w(z) = z^2 - 1$ и $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty)$. Определите $\arg w(z)$ и $\arg(z-1), \arg(z+1)$ так, чтобы $\arg(w(z)) = \arg(z-1) + \arg(z+1)$.
5. Пусть $w(z) = z^2 - 1$. Покажите, что функция $\sqrt{w(z)}$ может быть однозначно задана в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ условием $\sqrt{w(2)} > 0$. Вычислите $\sqrt{w(i)}$.
6. Пусть теперь $w(z) = \sqrt{(z^2-1)(z^2-4)}$.
   А) Покажите, что $w(z)$ может быть однозначно задана в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-2, -1] \cup [1, 2])$.
   Б) Куда $w(z)$ переводит верхнюю полуплоскость?
7. Придумайте конформное отображение, которое переводит круг $B = \{z \ : \ |z| < 1\}$ в дополнение отрезка $A = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Запишите это одной формулой.

8. Отобразите конформно закрашенную область в полуплоскость:

А) На поле стоит одинокая травинка. Выкорчевайте травинку.

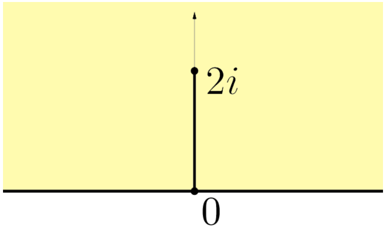
Б) Подул сильный ветер и травинка покосилась. Выкорчевайте травинку.

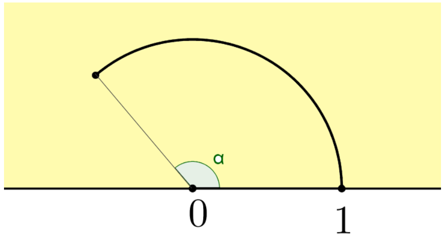
В) Ветер стал сильнее и травинка улетела. Поймайте травинку и вернитесь на поле.

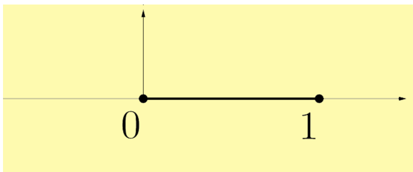
Г) «Зонтик» хочет поддержать нас в эту нелегкую питерскую погоду — не поддавайтесь, будьте сильны, уберите зонтик.

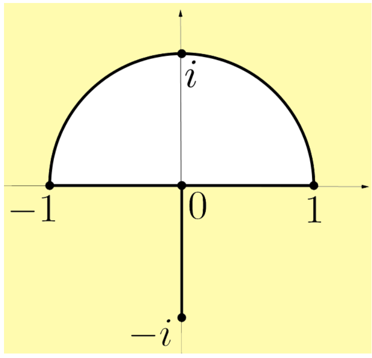
Д) На столе лежит диамант. Возьмите его и подарите своей девушке/парню.

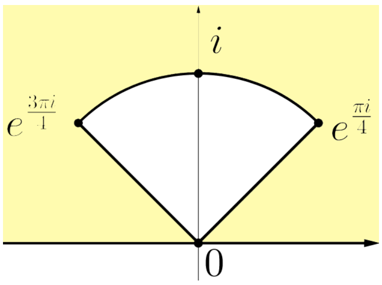
Е) Здесь может быть Ваша история.

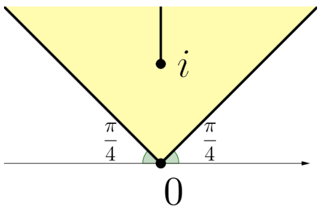
А) 

Б) 

В) 

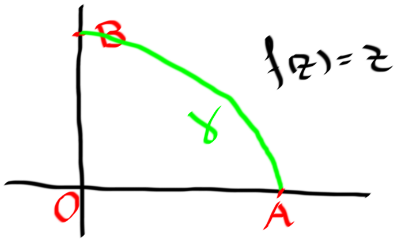
Г) 

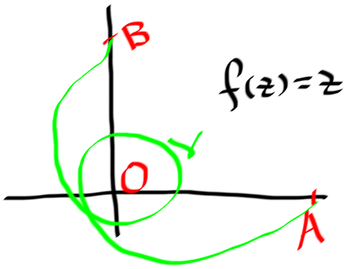
Д) 

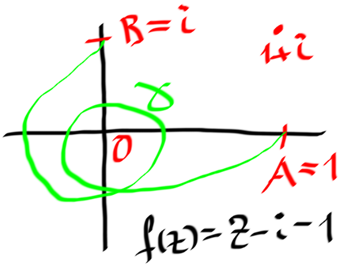
Е) 

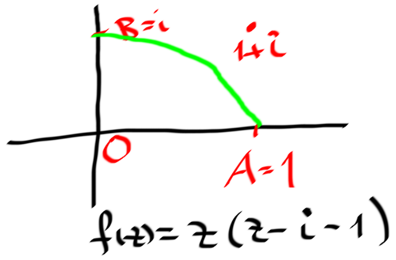
Занятие 5, 19.03.20. Конформные отображения в картинках.

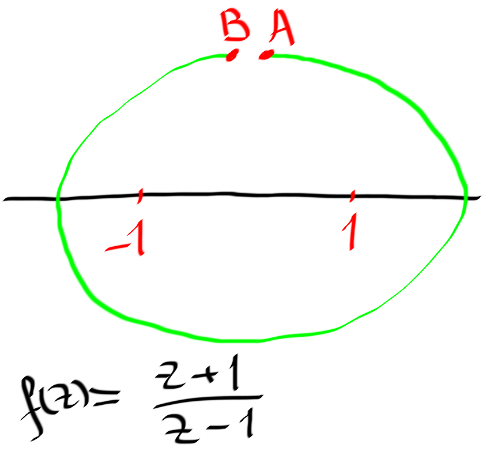
1. В нижеследующих задачах вам даны две точки $A, B \in \mathbb{C}$, выражение $f(z)$, путь γ, соединяющий точки A, B. Нужно найти $\arg f(B) - \arg f(A)$.

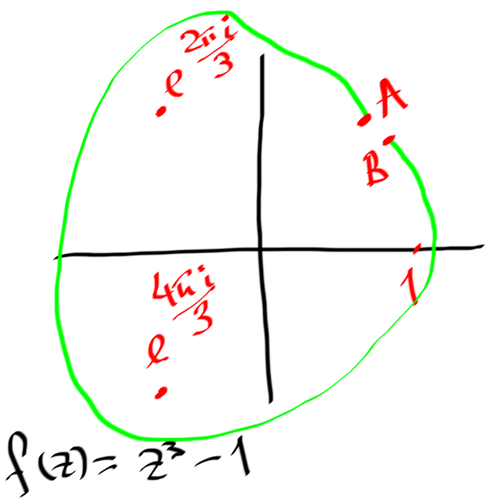




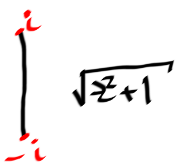


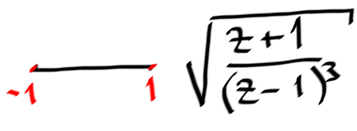


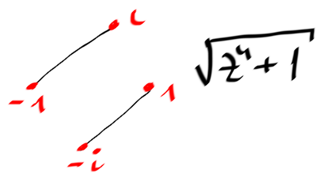




2. Теперь вам даны: плоскость с разрезом (разрезами), выражение $f(z)$. Требуется проверить, можно ли корректно определить ветвь $\sqrt{f(z)}$ вне разреза.







3. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ — *односвязная* ограниченная область и $\partial\Omega$ есть простая замкнутая кривая, заданная посредством параметризации $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Пусть $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, голоморфная внутри Ω. Предположим, что $f(z) \neq 0$ для всякого $z \in \partial\Omega$ и рассмотрим некоторую ветвь $\arg f(\gamma(t))$.

   А) Предположим, что $f(z) \neq 0$ для всякого $z \in \Omega$. Аккуратно проверьте, что $\arg f(\gamma(0)) = \arg f(\gamma(1))$.

   Б) Предположим, что γ ориентирована против часовой стрелки. Обозначим через N количество нулей функции f в Ω (с учетом кратности). Покажите, что $N < \infty$.

   В) Покажите, что $\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) = 2\pi N$.

4. Давайте поизучаем экспоненту и логарифм:

   А) Пусть $z = x + iy$. Покажите, что $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$.

   Б) Куда переходят при отображении $z \mapsto e^z$

      i. горизонтальная полоса $\{z \ : \ \alpha < \operatorname{Im}(z) < \beta\}$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

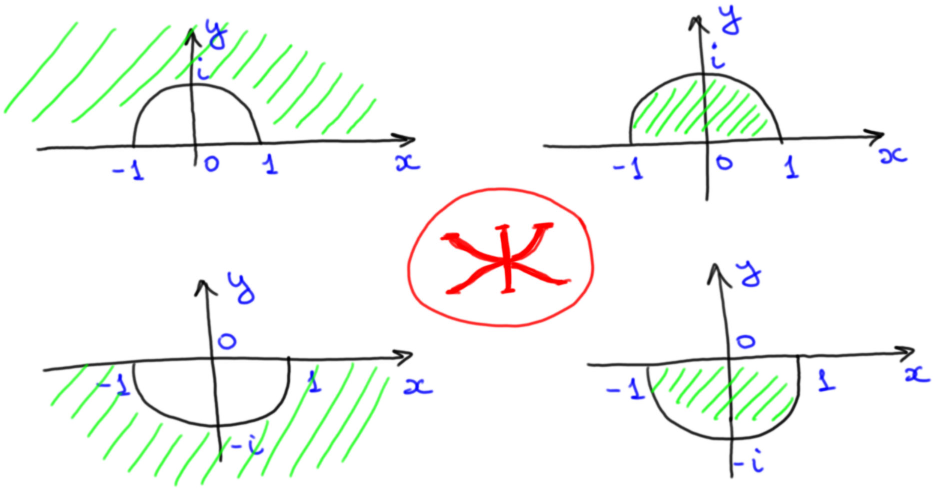
ii. вертикальная полоса $\{z \ : \ a < \Re(z) < b\}$

iii. горизонтальная полуполоса $\{z \ : \ 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi, \Re(z) > 0\}$.

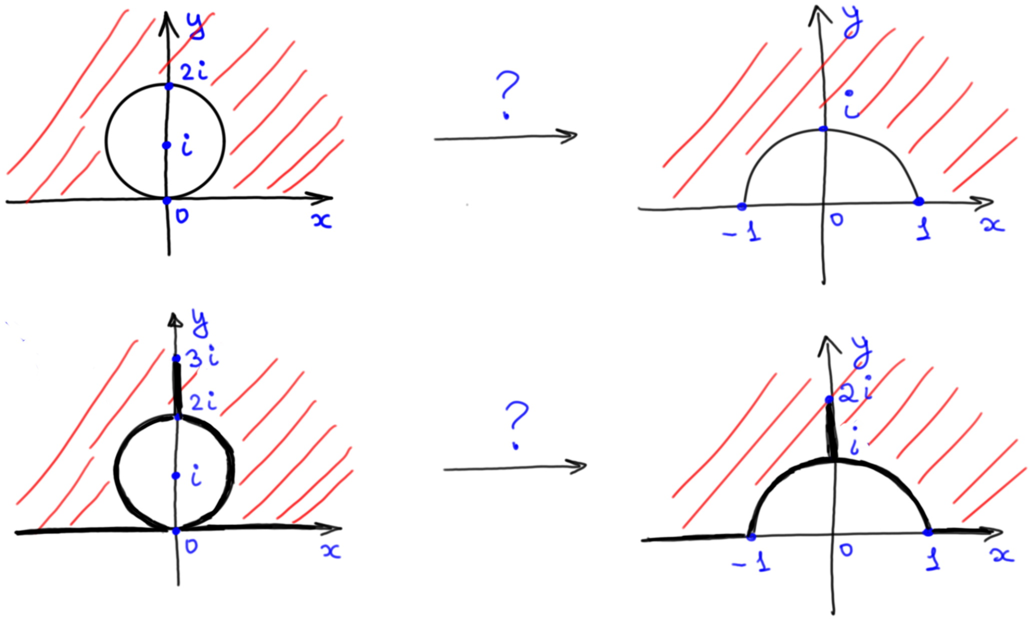
iv. горизонтальная полуполоса $\{z \ : \ 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi, \Re(z) < 0\}$.

В) Напомним, что $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$. Примените $\ln(z)$ к области $\{z \ : \ 1 < |z| < e, \arg(z) \in [2\pi, 5\pi/2]\}$

5. Преобразование $Ж(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ называют преобразованием Жуковского. Покажите, что каждая из данных областей переходит в полуплоскость под действием преобразования Жуковского. В какую именно: верхюю или нижнюю?



6. Придумайте конформное отображение, которое переводит «Начало заката Солнца» в «Солнце наполовину село» (без лучиков и с лучиком — отрезок $[2i, 3i]$ и отрезок $[i, 2i]$):



Hint: используйте весь арсенал конформных отображений: преобразование Мебиуса (в частности, сдвиги, повороты, гомотетии, инверсии), степенные отображения ($z \mapsto z^n$ и $z \mapsto z^{1/n}$), экспоненты и логарифмы.

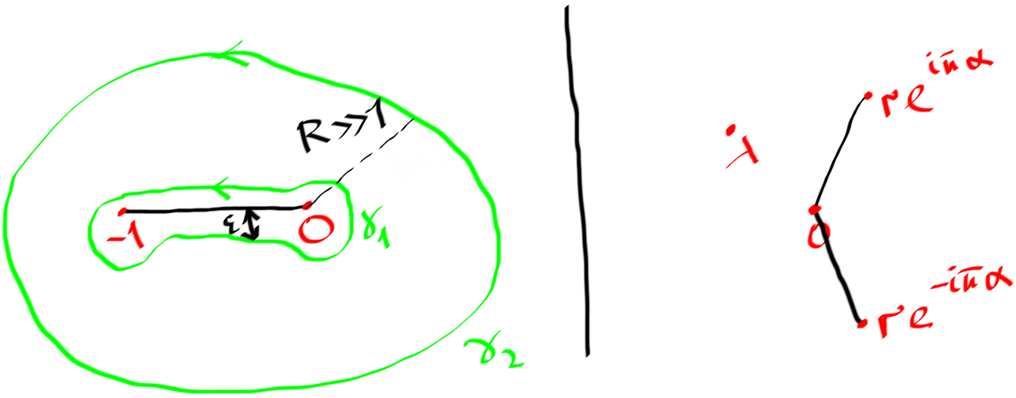
Для тех, кому все понятно

7. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрим функцию $f(z) = z^{\alpha}(z+1)^{1-\alpha}$, заданную в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,0]$.

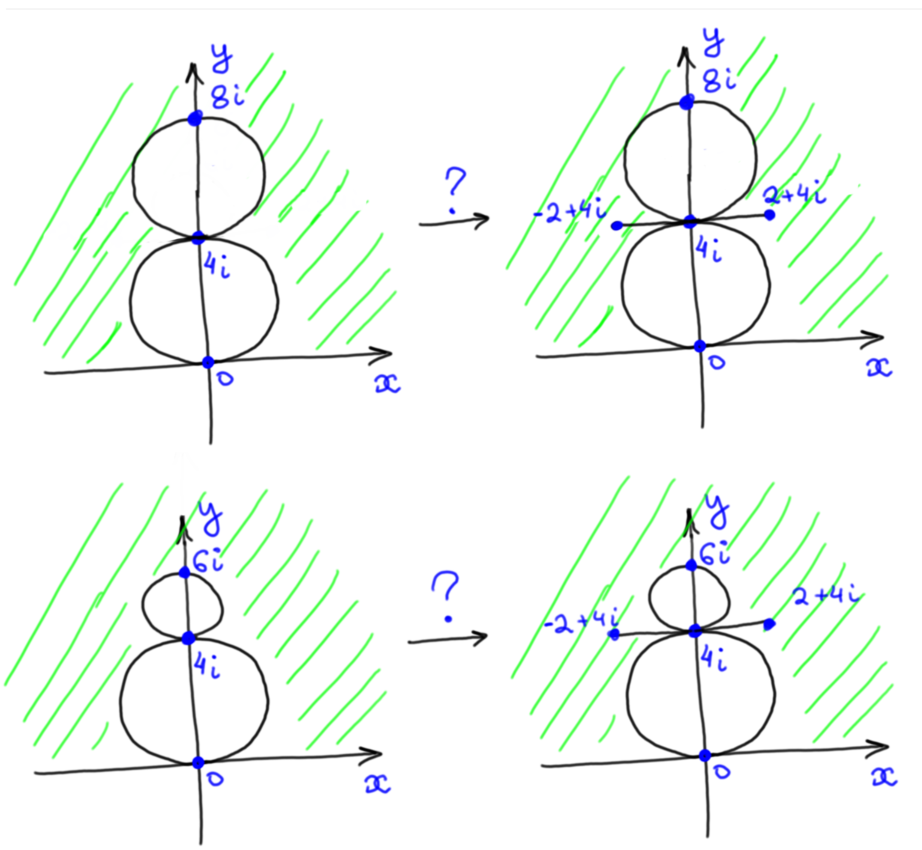
   А) Покажите, что граница Ω переходит в объединение двух отрезков $B = [0, re^{\pi\alpha}] \cup [0, re^{-\pi\alpha}]$, где
   $$r = (1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}.$$

   Б) Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus B$. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z) - \lambda$. Рассмотрим контуры γ_1, γ_2, как на картинке. Покажите, что приращение $\arg g(z)$ вдоль γ_1 равно нулю, а приращение $\arg g(z)$ вдоль γ_2 равно 2π.

   В) Заключите, что $g(z) = 0$ имеет единственное решение в Ω, и, стало быть, $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus B$ — конформное отображение (то есть биекция).



8. «Приделайте снеговику ручки» (придумайте конформное преобразование левой картинки в правую). Рассмотрите 2 случая: когда снеговик симметричный и несимметричный.



Занятие 6, 28.03.20. Теорема Руше. Ряды Лорана и вычеты.

Занятие 6, 28.03.20. Теорема Руше. Ряды Лорана и вычеты.

Теорема Руше: пусть $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфные фунции и $|f(z)| < |g(z)|$ для всякого $z \in \partial\Omega$. Тогда число нулей g и $f + g$ в Ω совпадает.

1. Найдите количество корней многочлена $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, в области $D \subset \mathbb{C}$:

   А) $P(z) = z^5 + 5z + 1, \quad D = \{|z| < 1\}$

   Б) $P(z) = 30z^7 + 239z^4 - 23z^2 + 99z + 1, \quad D = \{|z| < 1\}$

   В) $P(z) = z^5 - 12z^2 + 14, \quad D = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$

2. Докажите, что при $\lambda > 1$ уравнение
$$ze^{\lambda - z} = 1$$
   имеет в круге $D = \{z : |z| \leqslant 1\}$ ровно 1 корень.

3. Докажите, что уравнение $z \sin(z) = 1$ имеет только вещественные корни.

Ряды Лорана, особые точки и вычеты

1. Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+3)}$ в ряд Лорана с центром в нуле в областях:

   А) $D = \{z : |z| < 1\}$ Б) $D = \{z : 1 < |z| < 3\}$ В) $D = \{z : |z| > 3\}$

2. Найти все особые точки функции $f(z)$, определить их тип и найти вычеты в них:

   А) $f(z) = \frac{z^8}{(z^4+1)(z+1)^2}$

   Б) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

   В) $f(z) = \frac{1}{(\sin z)^2}$

   Г) $f(z) = z^{11} e^{1/z^2}$

3. Положим $\log f := \log |f| + i \arg f$. Покажите, что $e^{\log f} = f$.

4. Пусть γ — простая кривая, соединяющая точки z_0, z_1 и голоморфная функция f задана в окрестности γ и $f(z) \neq 0$ для всякого z. Покажите, что
$$\int_\gamma d \log f = i(\arg f(z_1) - \arg f(z_0))$$
   (обратите внимание, что $(\log f)' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ — однозначно определенная функция и $(\log fg)' = (\log f)' + (\log g)'$).

5. Пусть f — голоморфная функция.

   А) Предположим, что f имеет ноль в точке z_0 кратности d. Покажите, что $(\log f)'$ имеет простой полюс в точке z_0 и найдите вычет.

   Б) Используйте теорему о вычетах, чтобы посчитать приращение аргумента $f(z) = \frac{z^2+2}{z^3-1} \sin z$ вдоль пути $\gamma = \{|z| = 10\}$.

Занятие 7, 02.04.2020. Вычеты и интегралы по контурам.

Ряды Лорана, особые точки и вычеты. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется *рядом Лорана*, $a, c_n \in \mathbb{C}$. Ряд называется сходящимся в точке z, если в этой точке отдельно сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$$

Первый ряд сходится внутри некоторого круга $|z-a| < R$, а второй ряд сходится вне некоторого круга $|z-a| > r$, поэтому при $r < R$ ряд Лорана сходится в некотором кольце $r < |z-a| < R$.

Вычетом функции $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ в точке a называется ее коэффициент c_{-1} (при $1/(z-a)$) и обозначается $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$. Вычеты играют важную роль, когда мы хотим считать интегралы по контурам.

1. Найдите все полюса функции $f(z)$ и определите вычеты в них.

   А) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\sin z}$, Б) $f(z) = \frac{1}{z(\sin z)^2}$, В) $f(z) = z^{11} e^{1/z^2}$

Интегралы по контурам

Теорема 2 (Коши о вычетах). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и функция $f(z)$ — непрерывна в замыкании Ω и голоморфна в Ω за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in \Omega$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$$

2. Посчитайте интегралы по замкнутому контуру:

   А) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z+1}\,dz$ Б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2(1-\cos(z))}$ В) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z}-e^{1/z}}$

3. Найдите интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$ В) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ Д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2ix-2)^2}$

   Б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^6\,dx}{(x^4+a^4)^2}$, $a > 0$ Г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}\,dx}{x^2-2x+2}$ Е) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+a^2}$, $a > 0$

   Замечание: тут бывает полезна *лемма Жордана*:
   пусть $f(z)$ непрерывна на множестве $\{z : \operatorname{Im}(z) \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ и пусть

   $$\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0, \qquad \text{где} \qquad M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)|, \quad \Gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}.$$

   Тогда если $\alpha > 0$, то

   $$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\,dz = 0.$$

4. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}(\operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi})$.

5. Найдите сумму $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Занятие 8, 09.04.2020. Интегралы по контурам. Лемма Жордана.

Интегралы по контурам

Теорема 3 (Коши о вычетах). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и функция $f(z)$ — непрерывна в замыкании Ω и голоморфна в Ω за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in \Omega$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z=a_k} f(z)$$

1. Найдите интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{-ix}\,dx}{x^2-2x+2}$ Б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\,dx}{x^2+a^2},\ a>0$ В) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2-2ix-2)^2}$

   Замечание: тут бывает полезна *лемма Жордана*:
   пусть $f(z)$ непрерывна на множестве $\{z\,:\,\mathrm{Im}\,(z)\geqslant 0, |z|\geqslant R_0>0\}$ и пусть

   $$\lim_{R\to+\infty} M(R)=0, \qquad \text{где} \qquad M(R)=\max_{z\in\Gamma_R}|f(z)|, \quad \Gamma_R=\{z\,:\,|z|=R, \mathrm{Im}\,(z)\geqslant 0\}.$$

   Тогда если $\alpha>0$, то

   $$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz=0.$$

2. Найдите интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ В) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\log x\,dx}{x^2+1}$ Д) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx$

   Б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}$ Г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}},\ \Re(x)\in(0,\frac{1}{3})$ Е) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x^3-x^4}\,dx$

   Считаем суммы рядов с помощью вычетов

3. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}(\mathrm{cth}(a\pi)-\frac{1}{a\pi})$.

4. Найдите сумму $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

Занятие 9, 16.04.2020. Интегралы по контурам.

Интегралы по контурам

Теорема 4 (Коши о вычетах)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и функция $f(z)$ — непрерывна в замыкании Ω и голоморфна в Ω за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in \Omega$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z=a_k} f(z)$$

1. Найдите интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\log x\,dx}{x^2+4}$

   Б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)\,dx}{(1+x)^2}$

   В) $\int\limits_0^{1} \sqrt{x^3-x^4}\,dx$

   Г) $\int\limits_0^{2} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx$

   Д) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-\pi^2}\,dx$

   Е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\,dx$, $|\mathrm{Re}(\alpha)| \in (0,1)$

   A walk through the forest...

2. А может ли?

   А) Пусть $\mathbb{D} = \{z \;:\; |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Может ли f принимать только вещественные значения и не быть постоянной?

   Б) Пусть $\mathbb{D} = \{z \;:\; |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Может ли $f(\mathbb{D})$ быть неодносвязным (то есть ограничивать некоторое подмножество плоскости)?

   В) Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Может ли f быть ограниченной одновременно и на вещественной, и на мнимой оси?

   Г) Пусть $f : \{z \;:\; 0 < |z - z_0| < 1\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что f имеет полюс в z_0. Может ли f не принимать вещественных положительных значений?

3. Опишите все голоморфные $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых выполняется $|f(z)| \leq |z| + 1$ для всех z.

4. Опишите все голоморфные функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие $f(z + w) = f(z)f(w)$ для всяких $z, w \in \mathbb{C}$.

5. Пусть $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, где $\overline{\mathbb{D}} = \{z \;:\; |z| \leq 1\}$. Предположим, что $|f(z)| = 1$, если $|z| = 1$, и $f(z) \neq 0$ для всякого $z \in \mathbb{D}$. Покажите, что $f(z) = f(0)$ для всякого z.

6. Опишите все конформные преобразования $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Занятие 10, 23.04.2020. Keep on walking.

1. А может ли?

   А) Пусть $\mathbb{D} = \{z \ : \ |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Может ли f принимать только вещественные значения и не быть постоянной?

   Б) Пусть $\mathbb{D} = \{z \ : \ |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Может ли $f(\mathbb{D})$ быть неодносвязным (то есть ограничивать некоторое подмножество плоскости)?

   В) Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Может ли f быть ограниченной одновременно и на вещественной, и на мнимой оси?

   Г) Пусть $f : \{z \ : \ 0 < |z - z_0| < 1\} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что f имеет полюс в z_0. Может ли f не принимать вещественных положительных значений?

2. Опишите все голоморфные $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых выполняется $|f(z)| \leq |z| + 1$ для всех z.

3. Опишите все голоморфные функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие $f(z + w) = f(z)f(w)$ для всяких $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Пусть $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, где $\overline{\mathbb{D}} = \{z \ : \ |z| \leq 1\}$. Предположим, что $|f(z)| = 1$, если $|z| = 1$, и $f(z) \neq 0$ для всякого $z \in \mathbb{D}$. Покажите, что $f(z) = f(0)$ для всякого z.

5. Говорят, что элемент f кольца $\mathcal{R}$ делится на элемент g, если существует $\varphi \in \mathcal{R}$ такое, что $f = \varphi g$. Для каждой голоморфной функции f обозначим через $\mathrm{ord}_z f$ порядок нуля f в точке z. Покажите, что голоморфная функция f делится на g тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord}_z f \geq \mathrm{ord}_z g$ для всякой точки z из области определения.

6. Опишите все конформные преобразования $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

7. Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $P(z)$ — ненулевой многочлен. Пусть $P(f(\frac{1}{n})) = 0$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что f постоянна.

8. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Положим $u(z) = \Re f(z)$ и $v(z) = \mathrm{Im}\, f(z)$, то есть $f = u + iv$. Покажите, что u и v — гармонические, то есть удовлетворяют уравнению

$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} \equiv 0.$$

9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция.

   А) Покажите, что форма $\omega = u_x dy - u_y dx$ замкнута.

   Б) Предположим, что Ω односвязна. Пусть $z_0 \in \Omega$, определим $v(z) = \int_{z_0}^{z} \omega$, интеграл берется вдоль любого пути из z_0 в z. Функция v называется *гармонически сопряженной* к u. Покажите, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ голоморфна.

10. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u(x, y) = x^2 + \lambda xy - y^2$. Найдите голоморфную $f(z)$ такую, что $\Re f(x + iy) = u(x, y)$.

Занятие 11, 30.04.2020. And finally we come (not yet).

Разминка

1. Пусть $P, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — функция и $f(z)$ — голоморфна. Покажите, что f постоянна, если

   А) P — ненулевой многочлен,

   Б) P — ненулевая голоморфная функция.

2. Опишите все голоморфные функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такие, что
$$f(z+w) = f(z) + f(w) + zw$$
   для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Пусть $r > 0$, положим $\Omega_r = \{z \in \Omega \ : \ \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) > r\}$. Покажите, что
$$\sup_{z\in\Omega_r} |f'(z)| \le \frac{1}{r} \sup_{z\in\Omega} |f(z)|.$$

Гармоническая, или голоморфная?.. Да!

4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Положим $u(z) = \Re f(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, то есть $f = u + iv$. Покажите, что u и v — гармонические, то есть удовлетворяют уравнению
$$\Delta h = h_{xx} + h_{yy} \equiv 0.$$

5. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция.

   А) Покажите, что форма $\omega = u_x dy - u_y dx$ замкнута.

   Б) Предположим, что Ω односвязна. Пусть $z_0 \in \Omega$, определим $v(z) = \int_{z_0}^{z} \omega$, интеграл берется вдоль любого пути из z_0 в z. Функция v называется *гармонически сопряженной* к u. Покажите, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ голоморфна.

6. Пусть $\mathbb{C}^+ = \{z \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Найдите ограниченную гармоническую функцию $u : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$, непрерывную на $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такую, что

   А) $u(x) = 1$ если $x < 0$ и $u(x) = 0$ если $x > 0$;

   Б) $u(x) = 1$ если $a < x < b$ и $u(x) = 0$ иначе.

7. Пусть $U, V \subset \mathbb{C}$ — открытые множества, $f : U \to V$ — голоморфная функция и $u : V \to \mathbb{C}$ — гармоническая функция. Докажите, что $v(z) = u(f(z))$ — тоже гармоническая.

8. Пусть $\mathbb{D} = \{z \ : \ |z| < 1\}$ и $\mathbb{T} = \{z \ : \ |z| = 1\}$. Пусть $p, q \in \mathbb{T}$. Найдите гармоническую функцию $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, непрерывную на $\mathbb{D} \cup \mathbb{T} \setminus \{p, q\}$ такую, что $u(z) = 0$ если z между p и q и $u(z) = 1$, если z между q и p.

9. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, ограниченная простой замкнутой кривой. Пусть $z_0 \in \Omega$. Пусть $u : \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что

   - u гармонична в Ω
   - если $z \in \partial\Omega$, то $u(z) = \log|z - z_0|$.

   Функцию $G(z) = -\log|z - z_0| + u(z)$ будем называть функцией Грина в точке z_0.

   А) Проверьте, что $G(z)$ гармонична в $\Omega \setminus \{z_0\}$.

   Б) Пусть $\widetilde{G}$ — гармонически сопряженная функция к G (определенная в $\Omega \setminus \{z_0\}$). Вообще говоря, $\widetilde{G}$ определена только локально — при обходе вокруг z_0 ее значение меняется на константу. Покажите, что
$$\widetilde{G}(z) = -\arg(z - z_0) + \widetilde{u}(z),$$
   где $\widetilde{u}$ — это гармонически сопряженная к u.

   В) Положим $\Phi(z) = \exp(-G(z) - i\widetilde{G}(z))$. Проверьте, что $\Phi(z)$ — корректно определенная голоморфная функция на $\Omega \setminus \{z_0\}$.

   Г) Покажите, что Φ может быть продолжена до голоморфной функции в z_0.

   Д) Покажите, что $\Phi : \Omega \to \{z \ : \ |z| < 1\}$ — взаимно-однозначное отображение.

Занятие 12, 07.05.2020. Ряды Фурье.

Определение: ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

называется тригонометрическим рядом. А система функций $\{1, \sin(kx), \cos(kx)\}$ — тригонометрической системой. Пусть $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$ и ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$, тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

Такое разложение называется разложением в ряд Фурье функции $f(x)$.

1. Разложите функции в ряд Фурье по синусам и косинусам:

   А) $f(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$

   Б) $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{sign}(x), \quad x \in (-\pi, \pi)$.

   В) $f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2\pi)$

   Г) $f(x) = e^{ax}, \quad x \in (0, 2\pi)$

2. Найдите суммы следующих рядов:

   А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

3. А) Разложите $\sin(x)$, $x \in (0, \pi)$ в ряд по $\cos(2\pi x)$

   Б) Разложите $\cos(x)$, $x \in (0, \pi)$ в ряд по $\sin(2\pi x)$

4. А) Покажите, что:

   $$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

   Б) С помощью этого разложения найдите сумму $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

   В) Используя равенство Парсеваля, докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Пусть $f \in L^2[0, 2\pi]$ и a_n и b_n ее коэффициенты Фурье. Покажите, что

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\,dx$$

6. Покажите, что если у $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$ совпадают ряды Фурье, то $f = g$ п.в.

7. Используйте равенство Парсеваля, чтобы найти суммы рядов:

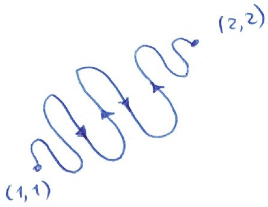
   А) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^4}$ Б) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{(a^2+n^2)^2}$ В) $\sum\limits_{n=1} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}$

2 Домашние задания

ДЗ 1. Гармонические функции на плоскости. Функции Грина. Дедлайн: 7 марта 23:59

1. Посчитайте криволинейные интегралы:

   А) (3) $\int\limits_\Gamma -\frac{x}{y^2}\,dx + \frac{x^2}{y^3}\,dy$, где Γ изображена на рис. справа ($(1,1)$ — начало, $(2,2)$ — конец).



   Б) (4) $\int\limits_\Gamma x^2y\,dx - xy^2\,dy$, где $\Gamma = \{(x,y) :\ x^2+y^2 = R^2,$ против часовой стрелки$\}$.

   В) (8) $\int\limits_\Gamma \left(\cos y + y\sin x + y^2\right)dx - \left(\cos x + x\sin y + x^2\right)dy$, где Γ — часть кардиоиды $r = a(1+\cos(\varphi))$, $a>0, y>0$, пробегаемой от точки $A(2a,0)$ до точки $O(0,0)$.

   P.S. тут бывает очень полезна формула Грина!

2. **Задача о том, как решать уравнение Лапласа, и в частности, восстанавливать гармоническую функцию по значениям на границе**

Лирика: Напомним, что $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная, связная область. Будем обозначать $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$. Мы хотим научиться решать задачу Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω:

$$\begin{cases} -\Delta u(z) = f(z), & z \in \Omega \\ u(z) = g(z), & z \in \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

Оказывается, что по заданным функциям $f \in C(\Omega)$, $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ можно однозначно восстановить функцию $u \in C^2(\Omega)$. Для этого нам понадобится фунция Грина $G(z,z_1)$ — это «кирпичик», из которого складывается решение задачи в общем случае (определение см. ниже). Функция Грина зависит от области Ω и не зависит от f, g. Цель задачи доказать следующую формулу для функции u — решения задачи (6):

$$u(z) = -\int\limits_\Omega f(z_1)\,G(z,z_1)\,dz_1 + \int\limits_{\partial\Omega} g(z_1)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}(z,z_1)\,dS(z_1). \tag{7}$$

Таким образом, зная функцию Грина G, мы можем найти u. Про функцию Грина можно неформально думать так: это такое элементарное решение задачи (6) при $g \equiv 0$ и $f = \delta(z - z_1)$ (дельта-функция Дирака, равна нулю везде, кроме точки z_1), т.е. для любой $z_1 \in \Omega$ выполнено

$$\begin{cases} -\Delta_z G(z,z_1) = \delta(z-z_1), & z \in \Omega \\ G(z,z_1) = 0, & z \in \partial\Omega \end{cases}$$

Неплохим кандидатом для функции G на плоскости является $\frac{1}{2\pi}\log|z-z_1|$. Действительно, по доказанному на практике $\Delta_z \log|z-z_1| = 0$ при $z \neq z_1$, а в точке $z = z_1$ у нее явно есть особенность (почему именно нормировка $\frac{1}{2\pi}$ станет понятно из решения задачи). Единственное, $\frac{1}{2\pi}\log|z-z_1|$ не обязательно удовлетворяет граничным условиям. Но это не страшно, давайте слегка его подкорректируем. Рассмотрим *корректор* $\varphi(z,z_1)$ такой, что при $z_1 \in \Omega$ выполнено:

$$\begin{cases} -\Delta_z \varphi(z,z_1) = 0, & z \in \Omega \\ \varphi(z,z_1) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-z_1|, & z \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

Тогда естественный кандидат на функцию Грина G — это $\frac{1}{2\pi}\ln|z-z_1| - \varphi(z,z_1)$.

Определение: функцией Грина для оператора Лапласа Δ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется

$$G(z,z_1) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-z_1| - \varphi(z,z_1),$$

где $\varphi(z,z_1)$ определяется из системы (8).

А) (9) (тут собраны вспомогательные утверждения)
Пусть $S_\varepsilon(z) = \{z_1 \in \mathbb{R}^2 : |z-z_1| = \varepsilon\}$, $B_\varepsilon(z) = \{z_1 \in \mathbb{R}^2 : |z-z_1| \leqslant \varepsilon\}$, причем $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$. Покажите, что для

любой функции $u \in C^2(\Omega)$ и любой функции $f \in C(\Omega)$ выполнено:

$$\int\limits_{S_\varepsilon(z)} \frac{\partial u(z_1)}{\partial n} \cdot \ln|z-z_1|\, dS(z_1) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon(z)} u(z_1) \frac{\partial \ln|z-z_1|}{\partial n}\, dS(z_1) \to u(z), \qquad \varepsilon \to 0,$$

$$\int\limits_{\Omega \setminus B_\varepsilon(z)} f(z_1) \cdot \ln|z-z_1|\, dz_1 \to \int\limits_{\Omega} f(z_1) \cdot \ln|z-z_1|\, dz_1, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Существование последнего предела равносильно сходимости интеграла с логарифмом (у подынтегрального выражения есть особенность — утверждение в том, что она суммируемая). Полезно вспомнить рассуждения, которыми мы руководствовались, когда выводили теорему о среднем для гармонической функции.

Б) (6) Примените формулу Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \int\limits_{\Omega_1} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy.$$

В качестве функции $u(z)$ возьмите решение задачи (6), в качестве функции $v(z)$ возьмите $G(z, z_1)$, считая, что $z_1 \in \Omega$ — это параметр. К сожалению, в качестве Ω_1 не получится взять Ω, т.к. у функции G есть логарифмическая особенность в точке z_1. Возьмите $\Omega_1 = \Omega \setminus B_\varepsilon(z_1)$.

В) (3) Пользуясь пунктом А) перейдите к пределу по $\varepsilon \to 0$ в формуле Грина из пункта Б). Покажите, что в пределе получается ровно формула (7).

P.S. Выглядит это довольно громоздко, но смысл простой — решение задачи Дирихле (6) с произвольными граничными данными g и производной правой частью f сводится к поиску функции Грина, которая зависит только от области Ω. Для стандартных областей Ω функцию Грина $G(z, z_1)$ можно найти явно. В следующей задаче мы найдем функцию Грина для полуплоскости и круга.

3. **Задача о том, как выглядят гармонические фукнции в полуплоскости и в круге**

Лирика: Для того, чтобы найти функцию Грина $G(z, z_1)$ достаточно подобрать подходящий корректор $\varphi(z, z_1)$. В таких областях, как полуплоскость $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) : y > 0\}$ и круг $B_1(0, 0)$, нам помогут соображения симметрии (в случае полуплоскости — зеркальная симметрия, в случае круга — инверсия).

Определение: будем говорить, что $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ симметрична точке $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ относительно оси OX, если $\tilde{x} = x$ и $\tilde{y} = -y$.

А) (3) Пусть $z_1 \in \mathbb{R}^2_+$. Докажите, что функция $\varphi(z, z_1) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - \tilde{z}_1|$ является решением задачи (8) при $\Omega = \mathbb{R}^2_+$.
P.S. Таким образом, кандидат на функцию Грина — это $G(z, z_1) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - z_1| - \frac{1}{2\pi} \ln|z - \tilde{z}_1|$.

Б) (8) Рассмотрим гармоническую функцию в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$

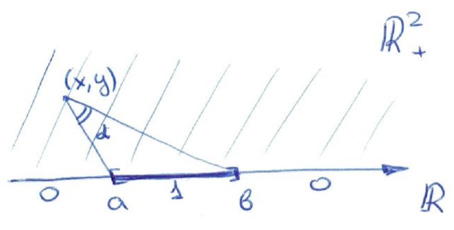
$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in \mathbb{R}^2_+ \\ u(z) = g(z), & z \in OX \end{cases} \tag{9}$$

Докажите, что $u(x, y)$ — решение задачи (9) — задается формулой (ее часто называют *формулой Пуассона*)

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{y g(x_1)}{(x - x_1)^2 + y^2}\, dx_1.$$

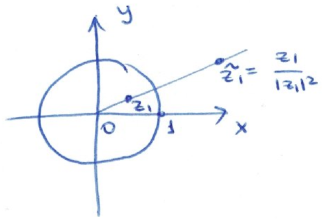
Замечание: тут есть 3 момента: 1) нужно просто подставить функцию Грина из А) в формулу (7) и все получится. 2) формально говоря, формулу (7) для данного случая нужно еще доказать, т.к. в задаче 2 область Ω — ограниченная, а тут нет. Давайте в проверку формулы (7) в случае $f \equiv 0$ для неограниченной области просто поверим (желающие конечно могут доказать за доп баллы!) 3) формула Пуассона работает, если $y > 0$. Нужно еще пояснить, почему $\lim\limits_{y \to 0} u(x, y) = g(x)$.

В) (3) Рассмотрим конкретные граничные данные: $g(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[a, b]$. Докажите, что гармоническая функция в полуплоскости с такими граничными данными — это функция u, которая в точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ равна величине угла, под которым виден отрезок $[a, b]$ из точки (x, y) (еще этот угол надо разделить на π). Говоря формально,



$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{b - x}{y}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{a - x}{y}\right) \right) = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Определение: будем говорить, что $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ симметрична точке $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ относительно окружности $S_1(0)$, если $\tilde{z} = \frac{z}{|z|^2}$. Преобразование $I : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ такое что $I(z) = \frac{z}{|z|^2}$ еще называют *инверсией*.



Г) (5) Пусть $z_1 \in B_1(0) \setminus \{0\}$. Докажите, что функция $\varphi(z, z_1) = \frac{1}{2\pi} \ln |z - \tilde{z}_1|$ «почти» является решением задачи (8) при $\Omega = B_1(0)$ (является гармонической функцией, но не удовлетворяет граничному условию). Подправьте функцию $\varphi(z, z_1)$, чтобы она стала решением задачи (8) при $\Omega = B_1(0)$. Выпишите правильную функцию Грина в этом случае.

Д) (8) Рассмотрим гармоническую функцию в круге $B_1(0)$

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in B_1(0) \\ u(z) = g(z), & z \in S_1(0) \end{cases} \tag{10}$$

Докажите, что $u(z)$ — решение задачи (10) — задается формулой (ее тоже называют *формулой Пуассона*)

$$u(z) = \frac{1 - |z|^2}{2\pi} \int\limits_{S_1(0)} \frac{g(z_1)}{|z - z_1|^2} \, dS(z_1).$$

Замечание: тут есть 2 момента: 1) нужно просто подставить функцию Грина из Г) в формулу (7) и все получится. 2) однако, есть проблема в интеграле из формулы Пуассона при $|z| = 1$ (он не неопределен). Правильнее определять так:

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1-|z|^2}{2\pi} \int\limits_{S_1(0)} \frac{g(z_1)}{|z-z_1|^2} \, dS(z_1), & |z| < 1, \\ g(z), & |z| = 1 \end{cases}$$

Докажите, что эта функция непрерывна.

ДЗ 2. Конформные преобразования. Дедлайн 18 марта в 23:59

Все матрицы ниже предполагаются обратимыми!

Еще о преобразованиях Мебиуса.

1. Любое преобразование Мебиуса задается матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ по правилу

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

В этом упражнении вы покажете, что преобразование Мебиуса определяет матрицу с точностью до умножения на константу и соответствие между матрицами и преобразованиями Мебиуса является гомоморфизмом групп.

А) (5) Пусть w_1 и w_2 задаются матрицами A_1 и A_2. Покажите, что композиция $w_1 \circ w_2$ (то есть преобразование $z \mapsto w_1(w_2(z))$) задается матрицей $A_1 A_2$ (то есть произведением этих двух матриц).

Б) (7) Покажите, что $\frac{az+b}{cz+d} \equiv z$ тогда и только тогда, когда $a = d$ и $b = c = 0$ (то есть матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ отличается от единичной на константу) и выведите из этого и предыдущего пункта, что $w_1(z) \equiv w_2(z)$ тогда и только тогда, когда матрицы, задающие эти два преобразования, пропорциональны.

В) (5) Покажите, что если $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, то $w^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

2. В этом упражнении вы опишете общий вид преобразований Мебиуса, сохраняющих верхнюю полуплоскость. Напомним, что преобразование Мебиуса однозначно описывается тем, какие точки оно переводит в $\infty, 0, 1$, и преобразование, переводящее в $\infty, 0, 1$ точки z_1, z_2, z_3 вычисляется по формуле

$$w(z) = (z_1, z_2; z_3, z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_1}.$$

А) Для начала покажем, что преобразование Мебиуса переводит $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда оно задается матрицей с вещественными коэффициентами:

i. (5) Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Покажите, что $w(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

ii. (7) Предположим, что $w(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Покажите, что $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. *Подсказака:* как выглядит преобразование, переводящее $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ в $\infty, 0, 1$? Вещественная ли у него матрица?

Б) (10) Покажите, что $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$

Указание: попробуйте представить $w(z)$ в виде цепочки сдвигов/растяжений/"инверсий" и воспользуйтесь тем, что определитель произведения есть произведение определителей.

В) (15) Пусть C_1, C_2 — две непересекающиеся окружности на плоскости. Докажите, что найдется преобразование Мебиуса w такое, что $w(C_1)$ и $w(C_2)$ имеют общий центр.

Аргумент и корень. Дисклеймер: мы пока только начали обсуждать, что такое аргумент, и в ближайший четверг изучим это более подробно.

3. (5) Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{t^2 + it \ : \ t \geq 0\}$. Определим $\arg z$ в Ω условием, что $\arg -1 = \pi$. Найдите $\arg i, \arg(1+\sqrt{3}i), \arg(\sqrt{3}+i)$.

4. (5) Положим $w(z) = z^2 + 1$ и $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it \ : \ t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$. Определим $\arg w(z)$ условием $\arg w(0) = 0$. Пусть $\sqrt{w(z)} = \sqrt{|w(z)|} e^{i \arg w(z)/2}$. Вычислите $\sqrt{w(-1)}$, $\sqrt{w(1+i)}$ и $\sqrt{w(1-i)}$.

5. (10) Покажите, что функция $\sqrt[3]{(z-1)^2(z+1)}$ может быть однозначно определена в комплексной плоскости с разрезом $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (функция должна быть непрерывной).

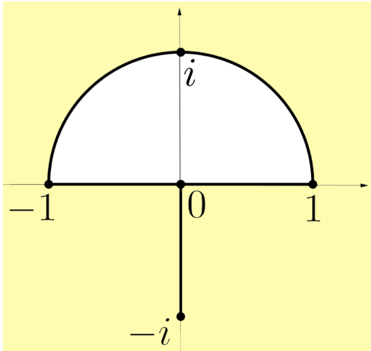
Черно-белая живопись.

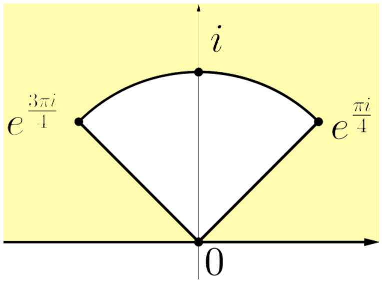
6. (7) Пусть $0 < \alpha < 1$. Определим функцию $w(z) = z^\alpha (z+1)^{1-\alpha}$ в верхней полуплоскости правилом $(re^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$, где $0 \leq \varphi \leq \pi$. Куда $w(z)$ переводит верхнюю полуплоскость?

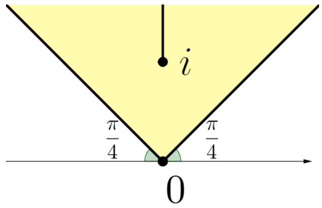
7. (10) Постройте конформное преобразование между $\mathbb{D} = \{z \ : \ |z| < 1\}$ и $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, где $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Выпишите его в явном виде.

8. (5) Покажите, что преобразование Мебиуса $z \mapsto \frac{1}{z+1}$ переводит ножку гриба (отрезок $[-i, 0]$) на первой картинке в дугу окружности с центром в $z_0 = 1/2$.

9. (7+10+10) Для каждой картинки ниже постройте конформные преобразование, переводящее желтую область в верхнюю полуплоскость.







Давайте договоримся, что в качестве ответа необходимо привести последовательность картинок и отображений, как следующая картинка получается из предыдущей. Выписывать единой формулой итоговое отображение не нужно.

ДЗ 3. Теорема Руше и простейшие контурные интегралы. Дедлайн 7 апреля в 23:59

Теорема Руше.

Теорема 5 (Руше)**.** *Пусть Ω — ограниченная область на плоскости и $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ — непрерывные функции, голоморфные в Ω и $|f(z)| < |g(z)|$ для всякого $z \in \partial\Omega$. Тогда функции g и $g + f$ имеют одинаковое число нулей (с учетом кратности) в Ω.*

Замечание: обратите внимание, что неравенство $|f(z)| < |g(z)|$ в теореме строгое, а область Ω — ограниченная!

1. Сколько корней имеет уравнение

   А) (5) $z^3 - 12z + 1 = 0$ в области $\{z \ : \ |z| \leq 2\}$,

   Б) (7) $z = 2 - e^{-z}$ в области $\{z \ : \ \Re z \geq 0\}$ (*подсказка:* полуплоскость не является ограниченной областью — но ведь можно смотреть на последовательность ограниченных областей, исчерпывающих полуплоскость?).

Интегралы по контурам

Теорема 6 (Коши о вычетах)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и функция $f(z)$ — непрерывна в замыкании Ω и голоморфна в Ω за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in \Omega$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=a_k} f(z),$$

где $\partial\Omega$ всегда ориентируется так, чтобы Ω располагалась слева по ходу ориентации.

2. Найдите интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) (7) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}$ (сделай замену $w = \frac{1}{z}$!)

   Б) (7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$

   В) (7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \ n \geq 2, \ n \in \mathbb{N}$

   Г) (7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^6\,dx}{(x^4+a^4)^2}, \ a > 0$ (используй четность!)

ДЗ 4. Контурные интегралы. Дедлайн 14 апреля, 23:59.

Найдите интегралы:

1. (7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x\,dx}{x^2 - 2x + 10}$

2. (7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{x^2+3x+2}, \qquad 0 < \alpha < 1$

3. (10, *это необязательное задание*) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\log x\,dx}{x^2+1}$

ДЗ 5. Контурные интегралы. Дедлайн 21 апреля, 23:59.

Найдите интегралы:

1. (7) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2(x)\,dx}{(1+x)^2}$

2. (7) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x+3}\,dx$

3. (7, *это необязательное задание*) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+1}\,dx$, $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$

   Указание: попробуйте проинтегрировать подинтегральное выражение вдоль границы прямоугольника $Q_R = \{x + iy \ : \ |x| \leq R, \ y \in [0, 2\pi]\}$ и устремить R к бесконечности.

ДЗ 6. Считаем суммы рядов с помощью вычетов. Дедлайн 28 апреля, 23:59.

Напоминание. На лекции было описано, как с помощью теоремы о вычетах можно вычислить сумму обратных квадратов. Давайте вспомним, как это было. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$. Функция f является мероморфной функцией с полюсами в точках вида πn, где $n \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\operatorname{Res}_{\pi n} f = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 n^2}, & n \neq 0, \\ -\frac{1}{3}, & n = 0. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $|\operatorname{ctg} z| \leq 4e$, если $|z| = R_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ (это случайная оценка, не ищите в ней глубокого смысла), отсюда сразу следует, что

$$\lim_{n \to +\infty} \oint\limits_{|z|=R_n} f(z)\, dz = 0.$$

Вычисляя эти интегралы с помощью вычетов мы получаем тождество

$$-\frac{1}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\pi^2 n^2} = 0,$$

что влечет $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

А теперь – дз! **Внимание:** надо сделать любые *две* задачи из трех (если сделаете три, то получите баллы за все задачи, конечно).

1. (8) Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}(\operatorname{cth}(a\pi) - \frac{1}{a\pi})$.
2. (8) Найдите сумму $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. (8) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Покажите, что $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ — открытое множество.

Доп ДЗ по всем темам. Дедлайн 27 мая, 23:59.

Формула Грина

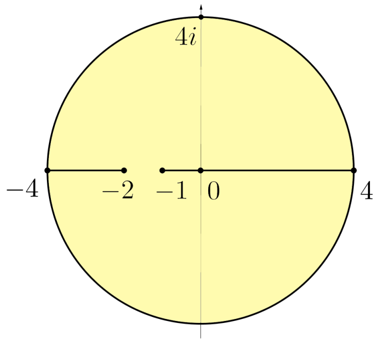
1. Найдите интегралы:

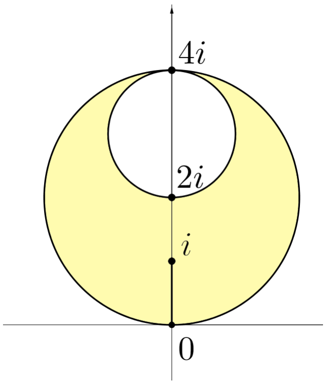
   А) (6) $\int\limits_{\gamma} e^x[(1-\cos(y)\,dx+(\sin(y)-y)\,dy)]$, где γ — кривая $y=\sin(x)$, пробегающая из точки $(0,0)$ в точку $(\pi,0)$.

   Б) (8) $\oint\limits_{\gamma} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, где γ — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат (направление против часовой стрелки). *Hint:* поймите, что есть два кардинально разных случая — когда контур обходит вокруг 0 и когда не обходит.

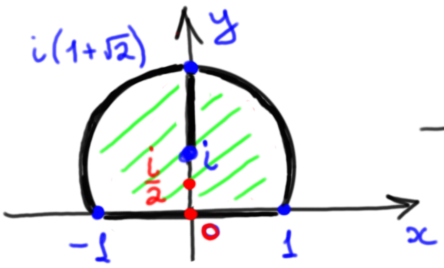
Конформные преобразования

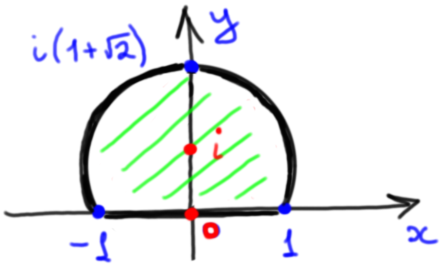
2. (7+8) Для каждой картинки ниже постройте конформные преобразование, переводящее желтую область в верхнюю полуплоскость.





3. (10) В карстовой пещере майя на потолке нарос сталактит (отрезок $[i, i(1+\sqrt{2})]$). Уберите сталактит, т.е. постройте конформное отображение из левой картинки в правую с условием, что точка $i/2$ переходит в точку i, а точка 0 остается на месте.





4. (6) Докажите, что если для дробно-линейного преобразования $w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ след равен нулю (т.е. $a+d=0$), то $w\circ w=id$.

Теорема Руше

5. Найдите число корней уравнений в указанной области:

   А) (4) $z^6+6z+10=0$ в $\Omega=\{z:|z|>1\}$;

   Б) (7) $z^4+z^3-4z+1=0$ в $\Omega=\{z:1<|z|<2\}$.

6. (10) Докажите, что уравнение $z\sin(z)=1$ имеет только вещественные корни.
   Hint: найдите число действительных корней этого уравнения на отрезке $[-(n+1/2)\pi,(n+1/2)\pi]$ и сравните его с числом всех корней этого уравнения в круге $|z|<(n+1/2)\pi$.

Контурные интегралы

7. Вычислите следующие интегралы, используя теорему Коши о вычетах:

   А) (8) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-10ix-21}$

   Б) (10) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)^3}$

   В) (8) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{(x+5)(x+10)}$, $\alpha \in (-1, 1)$

   Г) (8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\, dx$

   Д) (10) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}\, dx}{1+e^x+e^{2x}}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 2)$

Теор задачки по ТФКП

8. Существуют ли голоморфные функции $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ такие что (здесь $\mathbb{D}$ — единичный диск):

   А) (4) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$;

   Б) (8) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$.

9. (15) Пусть $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции, удовлетворяющие следующим функциональным уравнениям:

$$\begin{cases} f^2 + g^2 = 1, \\ f(z+w) = f(z)g(w) + g(z)f(w). \end{cases}$$

   Чему равны f и g?

Ряды Фурье

10. А) (6) Покажите, что:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi$$

   Б) С помощью 1) найдите суммы следующих рядов:

   i. (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

   ii. (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

   Hint: 1) проинтегрируйте верхнюю функцию и угадайте, что надо разложить в ряд Фурье, чтобы посчитать ряды выше
   2) воспользуйтесь признаком Дини (см. лекции), чтобы показать, что ряд Фурье сходится к значениям функции

11. (7) Разложите функцию $f(x) = x^3$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам и косинусам в $L_2(0, 2\pi)$.

3 Контрольные работы

Подготовка к КР1.

Еще раз про аргумент. На практике мы не успели подробно поговорить про аргумент, давайте сформулируем тут еще раз ключевые моменты.

1. если $z \neq 0$, то аргументом z называют любое $\varphi \in \mathbb{R}$, для которого $z = |z|e^{i\varphi}$. Таких φ бесконечно много, друг от друга они отличаются на $2\pi n$.

2. через $\arg z$ обозначают любую *непрерывную* функцию, задающую аргумент в каждой точке. Любую такую функцию называют *ветвью* аргумента.

3. *локально* $\arg z$ однозначно задается своим значением в одной точке: если $\arg z_0$ известно, то $\arg z$ однозначно вычисляется для z, близких к z_0.

4. *глобально* $\arg z$ можно задать не всегда, типичные ситуации, когда можно:

   А) область определения не содержит контуров, обходящих вокруг нуля.

   Б) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — путь, тогда можно задать $\arg \gamma(t)$, как функцию от t.

5. если $\arg z_0$ известен, то $\arg z_1$ можно поискать следующим образом: z_0 и z_1 соединяются путем γ, затем вычисляется приращение $\arg z$ вдоль γ (см. (d).2)).

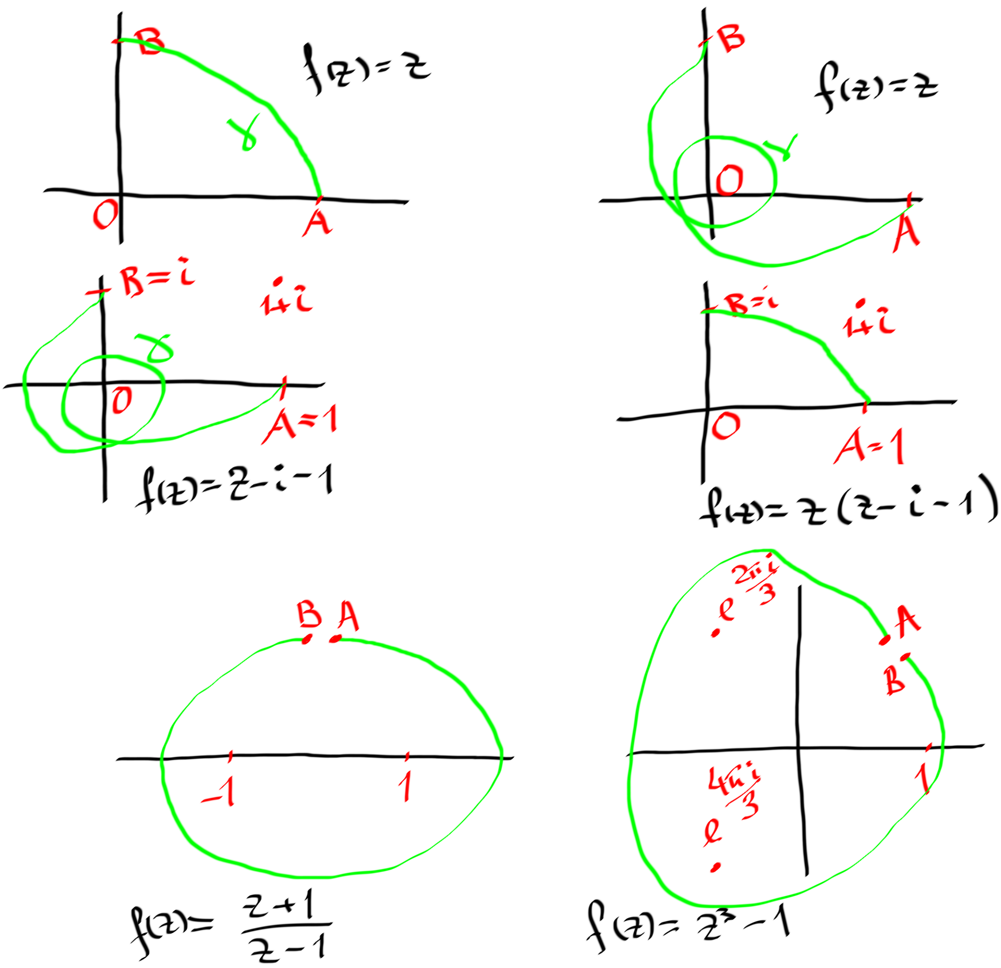
6. также, используя продолжение вдоль пути, можно вычислять $\arg w(z)$ для любой функции w.

7. препятствием к тому, чтобы определить $\arg w(z)$ глобально, являются пути, обходящие вокруг нулей w: надо, чтобы приращение $\arg w(z)$ вдоль любой замкнутой петли, содержащей хотя бы один ноль w, равнялось нулю.

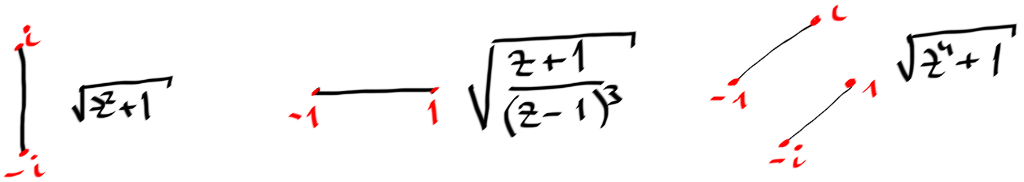
Задачи про аргумент.

1. В нижеследующих задачах вам даны две точки $A, B \in \mathbb{C}$, выражение $f(z)$, путь γ, соединяющий точки A, B. Найдите приращение $\arg f$ вдоль γ, то есть $\arg f(B) - \arg f(A)$.

   По 3 балла за 4 верхних картинки. По 5 баллов за 2 нижние картинки.



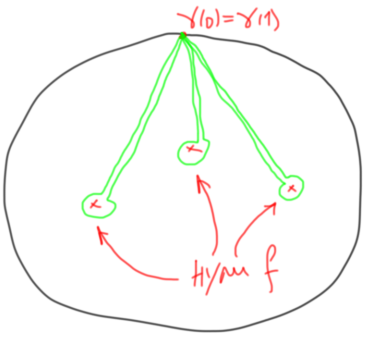
2. Теперь вам даны: плоскость с разрезом (разрезами), выражение $f(z)$. Требуется проверить, можно ли корректно определить ветвь $\sqrt{f(z)}$ вне разреза (напомним, что $\sqrt{f(z)} = \sqrt{|f(z)|}e^{\frac{i}{2}\arg f(z)}$, таким образом, $\sqrt{f(z)}$ задано корректно, если корректно задано $e^{\frac{i}{2}\arg f(z)}$). По 5 баллов за каждый пункт.



3. (**если вы можете решить эту задачу, вы все очень хорошо понимаете!**) Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, ограниченное замкнутой кривой без самопересечений. Пусть $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ — параметризация этой кривой. Пусть $f : \mathrm{Cl}(\Omega) \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, голоморфная внутри Ω. Предположим, что $f(z) \neq 0$ для всякого $z \in \partial\Omega$ и рассмотрим некоторую ветвь $\arg f(\gamma(t))$.

   А) (5) Пусть n — количество нулей f внутри Ω. Покажите, что $n < \infty$ (*hint*: множество нулей голоморфной функции не может иметь точку сгущения, используйте это!)

   Б) (10) Пусть d_k — кратность k-го нуля f и положим $N = \sum_{k=1}^{n} d_k$. Предположим, что γ ориентирована против часовой стрелки. Покажите, что $\arg f(\gamma(1)) - \arg f(\gamma(0)) = 2\pi N$ (*hint:* продеформируйте γ так, как на картинке ниже!).



$\exists\, z_0$ — ноль кратности d, тогда степенной ряд для f выглядит так:

$$f(z) = a_d(z-z_0)^d + a_{d+1}(z-z_0)^{d+1} + \ldots = (z-z_0)^d\left(a_d + O(z-z_0)\right)$$

$a_d \neq 0$

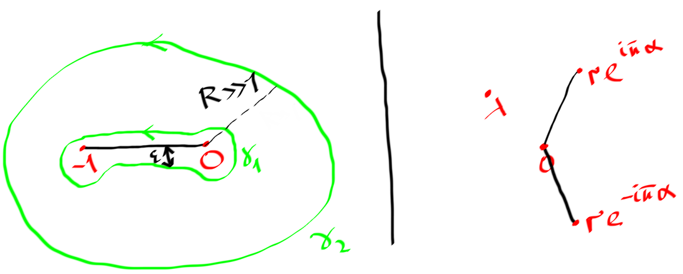
4. (**если вы можете решить эту задачу, вы все очень хорошо понимаете!**) Пусть $\alpha \in (0,1)$. Рассмотрим функцию $f(z) = z^{\alpha}(z+1)^{1-\alpha}$, заданную в области $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,0]$.

   А) (7) Покажите, что граница Ω переходит в объединение двух отрезков $B = [0, re^{\pi\alpha}] \cup [0, re^{-\pi\alpha}]$, где

$$r = (1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}.$$

   Б) (5) Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus B$. Рассмотрим функцию $g(z) = f(z) - \lambda$. Рассмотрим контуры γ_1, γ_2, как на картинке. Покажите, что приращение $\arg g(z)$ вдоль γ_1 равно нулю, а приращение $\arg g(z)$ вдоль γ_2 равно 2π.

   В) (5) Заключите, что $g(z) = 0$ имеет единственное решение в Ω, и, стало быть, $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus B$ — конформное отображение (то есть биекция).



Еще про живопись.

1. Давайте поизучаем экспоненту и логарифм:

   А) (1) Пусть $z = x + iy$. Покажите, что $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$.

   Б) Куда переходят при отображении $z \mapsto e^z$

      i. (3) горизонтальная полоса $\{z \ : \ \alpha < \operatorname{Im}(z) < \beta\}$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

      ii. (3) вертикальная полоса $\{z \ : \ a < \Re(z) < b\}$

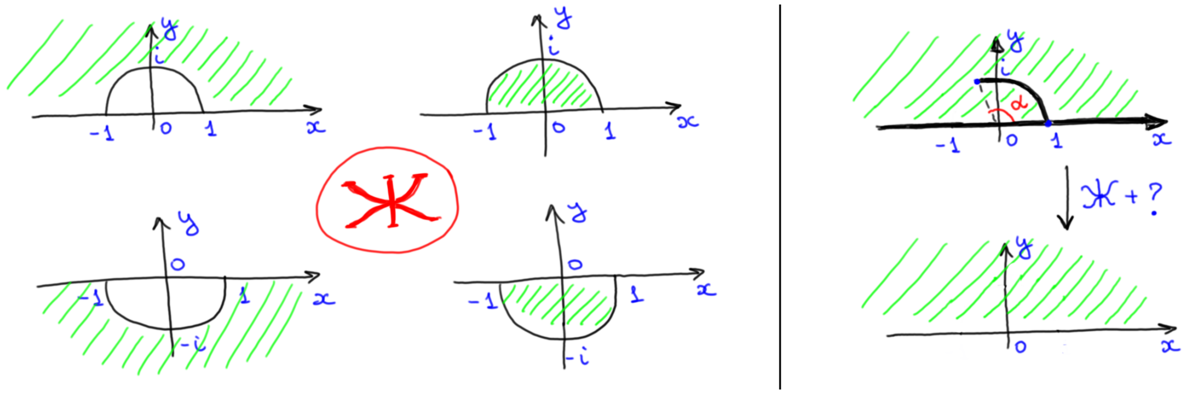
      iii. (3) горизонтальная полуполоса $\{z \ : \ 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi, \Re(z) > 0\}$.

      iv. (3) горизонтальная полуполоса $\{z \ : \ 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi, \Re(z) < 0\}$.

   В) (3) Напомним, что $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\arg(z)$. Примените $\ln(z)$ к области $\{z \ : \ 1 < |z| < e, \arg(z) \in [2\pi, 5\pi/2]\}$

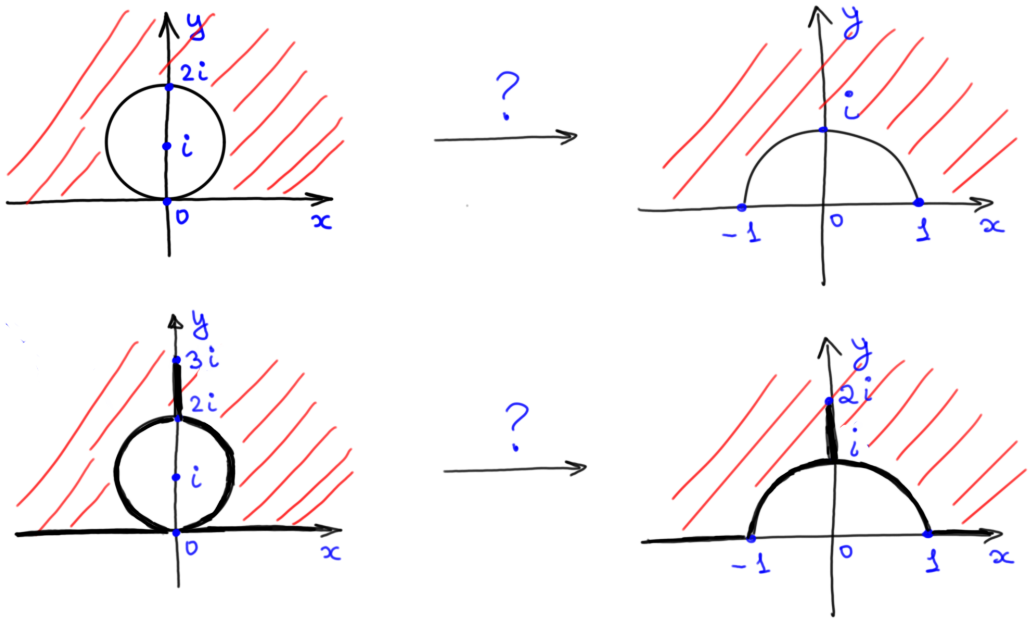
2. Преобразование $Ж(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ называют преобразованием Жуковского.

   А) (5) Покажите, что каждая из данных областей переходит в полуплоскость под действием преобразования Жуковского. В какую именно: верхнюю или нижнюю?



   Б) (5) Примените преобразование Жуковского $Ж(z)$ к «косой травинке» (убедитесь, что оно-таки взаимнооднозначно в этой области!). Преобразуйте получившуюся область в верхнюю полуплоскость.

3. Придумайте конформное отображение, которое переводит «Начало заката Солнца» в «Солнце наполовину село» (верхнее — 8 баллов; нижнее — 10 баллов — выкинуты отрезки $[2i, 3i]$ и $[i, 2i]$).



Hint: используйте весь арсенал конформных отображений: преобразование Мебиуса (в частности, сдвиги, повороты, гомотетии, инверсии), степенные отображения ($z \mapsto z^n$ и $z \mapsto z^{1/n}$), экспоненты и логарифмы.

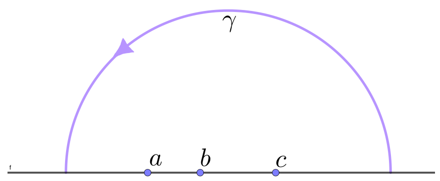
КР1. 26.03.2020

1. Пусть $w : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ — преобразование Мебиуса такое, что $w \circ w = \mathrm{id}$. Пусть $C \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — обобщенная окружность и $D = w(C)$. Предположим, что $C \cap D = \{x, y\}$ и $x \neq y$. Покажите, что $w(x) = y$.

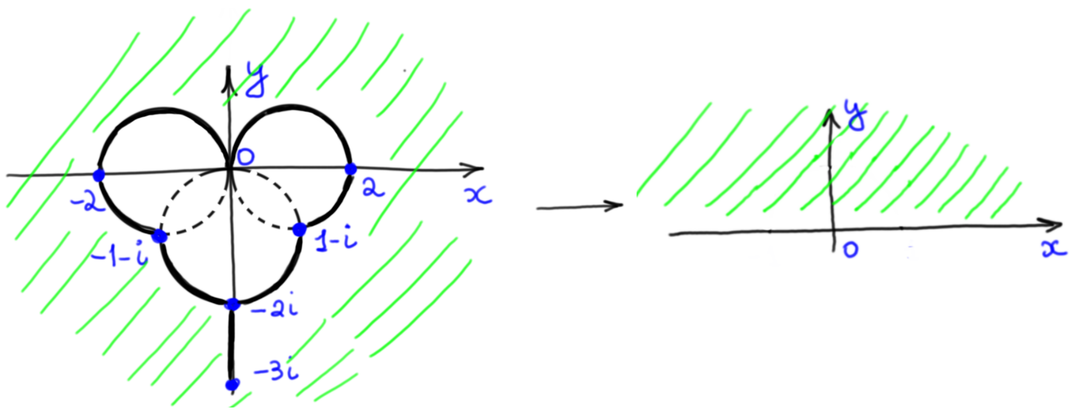
2. Пусть $a < b < c$ — точки на вещественной прямой и рассмотрим функцию $w(z)$ в верхней полуплоскости, заданную уравнением

$$w(z) = \sqrt{\frac{z-a}{(z-b)(z-c)}} + \sqrt{\frac{z-b}{(z-c)(z-a)}} + \sqrt{\frac{z-c}{(z-a)(z-b)}},$$

где корень задан условием $\sqrt{x} > 0$ если $x > 0$. Покажите, что $w(z) \neq 0$ для любого $z = x + iy$ при $y > 0$ и найдите приращение аргумента $w(z)$ вдоль пути γ как на картинке (γ ориентирован справа налево):



3. Придумайте конформное преобразование, которое переводит Микки Мауса в полуплоскость.



4. Вычислите интеграл:

$$\int_\gamma \left(e^x \frac{\sin(y)(x^2 - x + 1)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} - 7y + 1 \right) dx + e^x \frac{\cos(y)}{\sqrt{1+x^2}} \, dy,$$

где γ — верхняя дуга окружности $x^2 + y^2 = ax$, соединяющая точки $A(a, 0)$ и начало координат (обход против часовой стрелки).

КР1. Переписка 1. 11.04.2020

1. Пусть $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ — преобразование Мебиуса, причем $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 0$. Покажите, что найдутся две различные точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ такие, что $w(x_1) = x_1$ и $w(x_2) = x_2$.

2. Рассмотрим функции φ и ψ в области $\Omega = \{z \ : \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$, заданные правилом

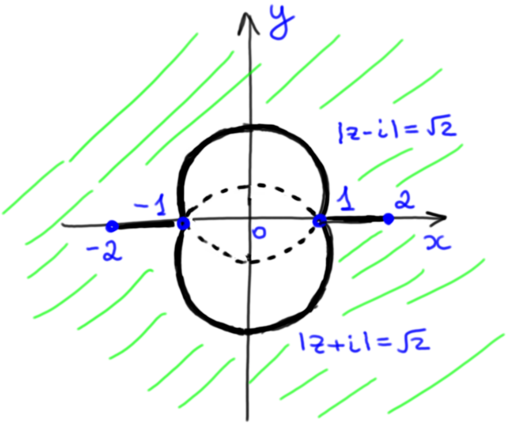
$$\varphi(z) = \frac{z(z-1)(z-2)}{z-3}, \qquad \psi(z) = \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{z}.$$

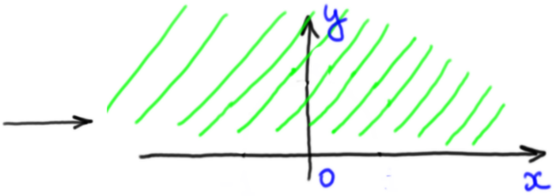
Положим

$$\arg \phi(-1) = \arg \psi(-1) = 0 = \arg\Big(\sqrt{\psi(-1)} + \sqrt{\varphi(-1)}\Big).$$

Найдите $\arg\Big(\sqrt{\psi(10)} + \sqrt{\varphi(10)}\Big)$.

3. Придумайте конформное преобразование, которое переводит Снеговика с ручками в полуплоскость.





4. Вычислите

$$\oint\limits_{\gamma} \left(\sqrt{x^2+y^2}\, dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\, dy \right),$$

где γ — эллипс $(x-a)^2 + y^2/4 = a^2$ (направление против часовой стрелки).

КР1. Переписка 2. 16.05.2020

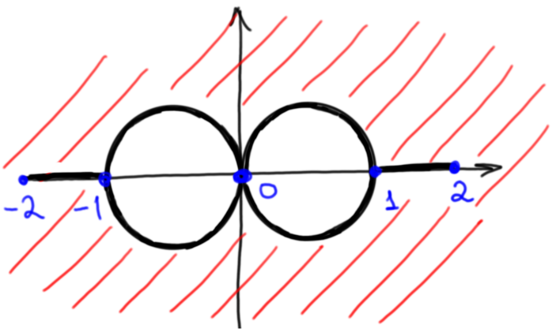
1. Пусть f — непостоянная мероморфная функция на $\mathbb{C}$. Определим Шварциан f через

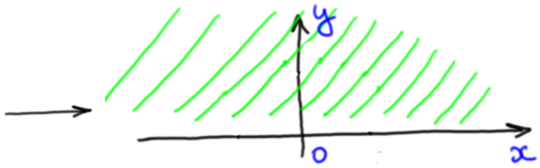
$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Докажите, что $Sf = 0$ тогда и только тогда, когда f — преобразоание Мебиуса.

2. Пусть $|a| > 1$. Рассмотрим функцию $f(z) = a + \cos z$. Пусть $Q_R = \{x + iy \ : \ x \in [-R, R],\ y \in [0, R]\}$ — большой такой прямоугольник. Оцените приращение аргумента f вдоль границы Q_R и покажите, что f имеет бесконечное число нулей в верхней полуплоскости.

3. Придумайте конформное преобразование, которое переводит Очки в полуплоскость.





4. Вычислите интегральчик:

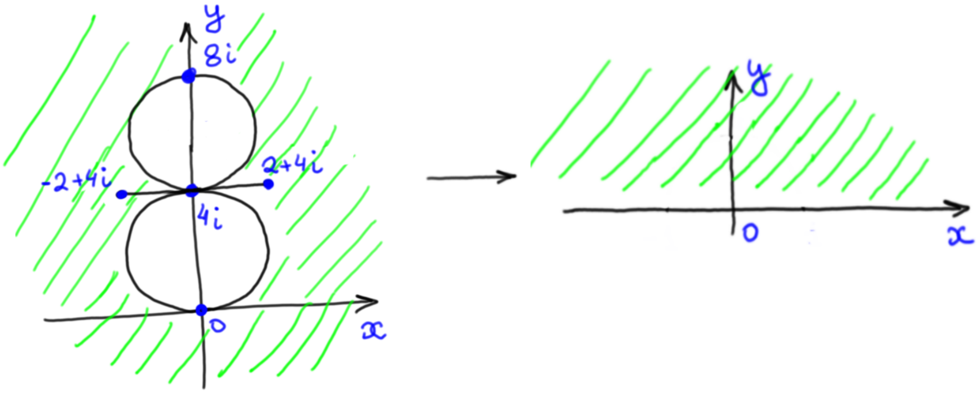
$$\int\limits_{\gamma} \frac{xy^2\, dx - x^2 y\, dy}{x^2 + y^2},$$

где γ — четвертинка лемнискаты Бернулли, а именно, $\gamma = \{(r, \varphi) : r^2 = a^2 \cos(2\varphi), \varphi \in (0, \frac{\pi}{4})\}$. Здесь (r, φ) — полярные координаты. Кривая γ направлена от точки a^2 до точки 0.

КР1. Переписка 3. 21.05.2020

1. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре точки на плоскости. Вам разрешено один раз применить преобразование Мебиуса и один раз применить z^2. Можно ли перевести таким образом z_1, z_2, z_3, z_4 в вершины описанного четырехугольника?

3. Придумайте конформное преобразование, которое переводит Снеговика с ручками в полуплоскость.



4. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_{\gamma} \left(e^x \frac{\sin(y)(x^2 - x + 1)}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} - 7y + 1 \right) dx + e^x \frac{\cos(y)}{\sqrt{1 + x^2}} \, dy,$$

где γ — четвертинка лемнискаты Бернулли, а именно, $\gamma = \{(r, \varphi) : r^2 = a^2 \cos(2\varphi), \varphi \in (0, \frac{\pi}{4})\}$. Здесь (r, φ) — полярные координаты. Кривая γ направлена от точки a^2 до точки 0.

Подготовка к КР2.

1. (8) Вычислите интеграл:

$$v.p. \int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2-\pi^2}\,dx$$

Подсказка: тут полезно вспомнить лемму о полувычете (смотрите лекции)!

2. (8) Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что уравнение $1+z+az^n=0$ имеет хотя бы один корень в диске $\{z \ : \ |z| \le 2\}$.
Подсказка: чему равно произведение корней этого уравнения?

3. (8) Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, причем $f(z) \ne 0$ для всякого z и выполняется $|f(x+iy)| \le e^y$ и $f(0)=1$. Чему равна f?

4. (8) Разложите $f(x) = (\cos x)^n$ в тригонометрический ряд Фурье (на промежутке $[-\pi, \pi]$).
Подсказка: замените все функции на экспоненты.

КР2. 14.05.2020

1. Посчитайте интеграл:

$$\int_{-2}^{4} \ln\left(\frac{2+x}{4-x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2(2+x)}}$$

2. Сколько корней имеет уравнение $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ в области $\{z \ : \ |z| \ge 1\}$?

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — непустое связное открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что для каждого $z \in \Omega$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

4. Пространство $L^2(0,\pi)$ можно очевидным образом отождествить с подпространством $L^2(-\pi,\pi)$, состоящим из четных функций. Используйте это, чтобы показать, что функции $\cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}_0$, образую ортогональный базис в $L^2(0,\pi)$ и разложите $f(x) = \sin(x)$, $x \in (0,\pi)$, в ряд по этому базису.

КР2. Переписка 1. 16.05.2020

1. Посчитайте интегральчик-интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

2. Сколько корней имеет уравнение $z^7 + 15z^3 + 8 = 0$ в области $\{z \ : \ 2 \ge |z| \ge 1\}$?

3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция. Предположим, что существует $z_0 \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $u(z) = 0$ для всех z из ε - окрестности z_0. Докажите, что $u(z) = 0$ для всех z.

4. Пространство $L^2(0,\pi)$ можно очевидным образом отождествить с подпространством $L^2(-\pi,\pi)$, состоящим из нечетных функций. Используйте это, чтобы показать, что функции $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, образуют ортогональный базис в $L^2(0,\pi)$ и разложите $f(x) = 1$, $x \in (0,\pi)$, в ряд по этому базису.

КР2. Переписка 2. 21.05.2020

1. Посчитайте интегральчик:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[5]{(1+x)(1-x)^4}}{x^2+1}\,dx;$$

2. Докажите, что для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda| < 1$, уравнение $e^z(z-1) = \lambda$ имеет ровно один корень в правой полупоскости.

3. Предположим, что $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция и $u(z) < 0$ для всякого z. Докажите, что u — постоянная функция.

4. Предположим, что $f \in L^2(-\pi,\pi)$, причем $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ и $f \perp \cos^n(x)$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что $f(-x) = -f(x)$ п.в.

4 Матбой по ТФКП

1. Будем говорить, что многочлен с вещественными коэффициентами от двух переменных $P \in \mathbb{R}[x, y]$ — гармонический, если $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y} = 0$; иными словами, P является гармонической функцией.

   Пусть $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — гладкие функции. Предположим, что для всякого гармонического многочлена P функция $P(u(z), v(z))$ — гармоническая. Положим $f = u + iv$. Докажите, что f — голоморфная, или антиголоморфная функция.

   UPD: из условия выше выводится, что $\partial f(z) \overline{\partial} f(z) = 0\ \forall z$ (и, вроде как, это эквивалентно условию), и именно это я имел в виду под "f — голоморфная, или антиголоморфная функция". Однако, сформулировал я это довольно неуклюже: кажется, в настоящем варианте задачи требуется доказать

$$\partial f(z) = 0\ \forall z \qquad \text{ИЛИ} \qquad \overline{\partial} f(z) = 0\ \forall z.$$

   Оказалось, что при условии непрерывной дифференцируемости $\partial f(z) \overline{\partial} f(z) = 0\ \forall z$ влечет это утверждение! Однако, я не придумал этому элементарное доказательство :(

2. Пусть $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции, удовлетворяющие следующим функциональным уравнениям:

$$\begin{cases} f^2 + g^2 = 1, \\ f(z + w) = f(z)g(w) + g(z)f(w). \end{cases}$$

   Чему равны f и g?

3. Пусть $z_1, \ldots, z_n \in \{z\ :\ |z| = 1\}$ — попарно различные точки и $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ — рациональная функция с простыми полюсами в $z_1, \ldots, z_n$ и регулярная в остальных точках $\mathbb{C}$. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

   степенной ряд для f в нуле. Обозначим через $\varphi(N)$ число ненулевых коэффициентов среди $a_0, \ldots, a_N$. Покажите, что

$$\limsup_{N \to +\infty} \frac{N}{\varphi(N)} \leq n.$$

4. Пусть $P(z)$ — многочлен степени n и $z_1, \ldots, z_n$ — его корни. Обозначим через Δ выпуклую оболочку $z_1, \ldots, z_n$. Покажите, что все корни $P'(z)$ содержатся в Δ.

5. Для двух точек A, B на плоскости обозначим через AB расстояние между ними. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — фиксированы (и различны), рассмотрим множество

$$\mathrm{Lem} = \{A\ :\ AA_1 \cdot AA_2 \cdot \dots \cdot AA_n = 1\}.$$

   Докажите, что Lem разбивает плоскость не более, чем на $n + 1$ компоненту.

6. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_0^1 f(t) \sin(zt)\, dt.$$

   Пусть $0 < |f(1)| < |f(0)|$. Покажите, что F имеет бесконечное число нулей и лишь конечное их число — вещественные.