Практические занятия по вариационному исчислению
2 курс «Математика» МКН
IV семестр, весна 2021

Содержание

1 Общие сведения

Здесь собраны материалы с практических занятий по вариационному исчислению на 2 курсе МКН, программа “Математика” (СПбГУ), которые проводились в весеннем семестре 2021 в режиме онлайн. Решений задач здесь нет, только условия.

Лектор: Филонов Николай Дмитриевич

Практики: Рядовкин Кирилл Сергеевич, Романов Роман Владимирович, Петрова Юлия Петровна

В частности, в данном файле представлены материалы занятий и домашних заданий в группе Петровой Юлии. Задачи с занятий существенно пересекаются с задачами в домашних заданиях, т.к. в качестве домашней работы часто оставались неразобранные задачи с занятий.

Возможны опечатки, ошибки и неточности. По всем вопросам можно обращаться к Петровой Юлии (yu.pe.petrova@yandex.ru).

Большинство задач стандартны, и брались из следующих источников:

1. Гюнтер, Кузьмин “Сборник задач по высшей математике”, том 3, издание 4, раздел XVI “Вариационное исчисление”.

2. Романко “Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления”, Глава 9 “Основы вариационного исчисления”.

2 Материалы занятий

Занятие 1, 17.02.2021. Простейшие задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа

Основной объект изучения вариационного исчисления — это функционал $J[y] : X \to \mathbb{R}$. Мы будем рассматривать интегральные функционалы следующего вида:

$$J[y] = \int\limits_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{1}$$

где $L = L(x, y, v) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, а X — некоторое функциональное пространство.
Основная задача вариационного исчисления — поиск минимума или максимума функционала $J[y]$ (локального).
Мы увидим, что многие естественные законы сводятся к такой постановке.

Очень часто мы будем рассматривать $X = C^1[a, b]$. Но сегодня для нас

$$X := \{y : [a, b] \to \mathbb{R} : \ y(x) \in C^1[a, b],\ y(a) = A,\ y(b) = B\}, \tag{2}$$

что относится к так называемым «задачам с закрепленными концами».

1. Докажем какой-нибудь и так всем понятный факт: например, что кратчайшая кривая между двумя точками — это прямая. Пусть $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $y(x) \in C^1[0, 1]$ и $y(0) = 0, y(1) = 1$. Длина графика y задается
$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$
   А) Покажите, что прямая $y = x$ является единственной стационарной точкой.
   Б) Покажите, что прямая $y = x$ является локальным и глобальным минимумом.

2. **Задача о мыльной пленке или о минимальной площади поверхности.**
   В трехмерном пространстве расположены 2 кольца $C_1 = \{(x, y, z) : \ y^2 + z^2 = A^2,\ x = 0\}$ и

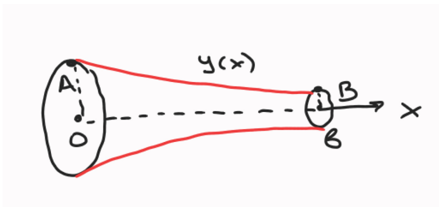


Рис. 1: Схематическое изображение мыльной пленки между двумя кольцами

$C_2 = \{(x, y, z) : \ y^2 + z^2 = B^2,\ x = b\}$. Какой формы образуется мыльная пленка между кольцами после опускания их в мыльную воду? Отметим, что за счет поверхностного натяжения пленка стремится принять ту форму, у которой минимальная площадь поверхности. Будем искать ответ только среди поверхностей вращения.

   А) Покажите, что задача о мыльной пленке сводится к минимизации следующего функционала:
$$J[y] = \int\limits_0^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$
   где $y(x)$ — это график функции, вращением которого вокруг оси OX образована поверхность.
   Б) Покажите, что вариация этого функционала $\delta J(y, h)$ равна 0 равносильно следующему ODE (для некоторой константы c):
$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$
   В) Решите ODE из пункта Б). Что это за кривая?

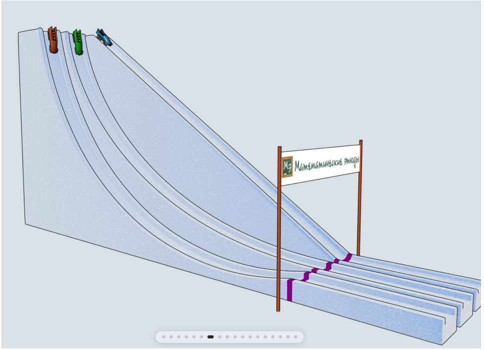


Рис. 2: По какой траектории спуск будет наискорейшим?

3. **Задача о брахистохроне.**

   Пусть Вам нужно спуститься из точки $A = (0, a)$ в точку $B = (b, 0)$. Какой кривой нужно соединить эти точки, чтобы спускаясь по ней «как с горки» только под действием силы тяжести и без трения прийти как можно быстрее в точку B?

   А) Покажите, что задача о брахистохроне сводится к минимизации следующего функционала:

   $$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{a - y}}\, dx$$

   на множестве $X = \{y : [0, b] \to \mathbb{R} : \; y(x) \in C^1[0, b],\; y(0) = a,\; y(b) = 0\}$.

   Б) Покажите, что вариация этого функционала $\delta J(y, h)$ равна 0 равносильно следующему ODE (для некоторой константы c):

   $$(a - y) \cdot (1 + y'(x)^2) = c.$$

   Что можно сказать про производную $y'(x)$ в точке $x = a$?

   В) Решите ODE из пункта Б). Что это за кривая?
   Hint: сделайте замену $y := \frac{c}{2}(1 - \cos(\varphi))$.

   P.S. Красивое решение задачи о брахистохроне через законы геометрической оптики (законы Снелиуса) можно посмотреть на канале 3blue1brown: https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU

4. При каких y_a и y_b функционал $J[y] : X \to \mathbb{R}$ имеет локальные экстремумы, где $J[y]$ задан формулой:

   $$J[y] = \int_a^b (x^2 + y^2(x) + y(x)y'(x))\, dx,$$

   на пространстве $X = \{y : \; [a, b] \to \mathbb{R} : \; y \in C^1[a, b], y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$.

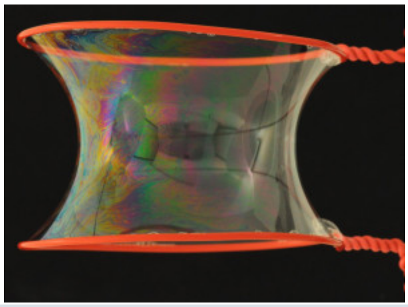
5. (для желающих) Найдите функции, подозрительные на экстремум, для функционала:

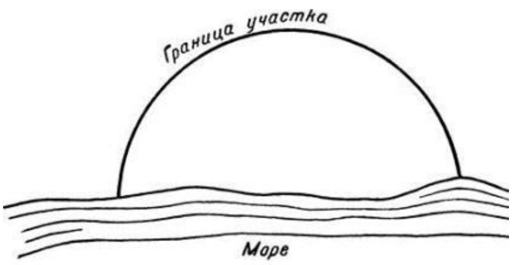
   $$J[y] = \int_0^1 (y'(x))^2\, dx - y^2(1),$$

   на множестве $X = \{y : [0, 1] \to \mathbb{R} : \; y \in C^2[0, 1], y(0) = 0\}$.
   P.S. Будьте аккуратны! Это не задача с закрепленными концами — обратите особое внимание на граничные значения функции y!

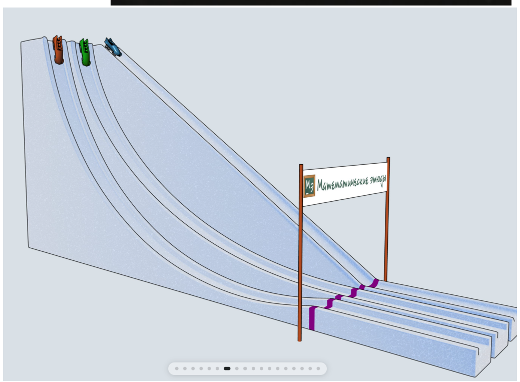
Много вариационных задач естественным образом возникает из физики / жизни:

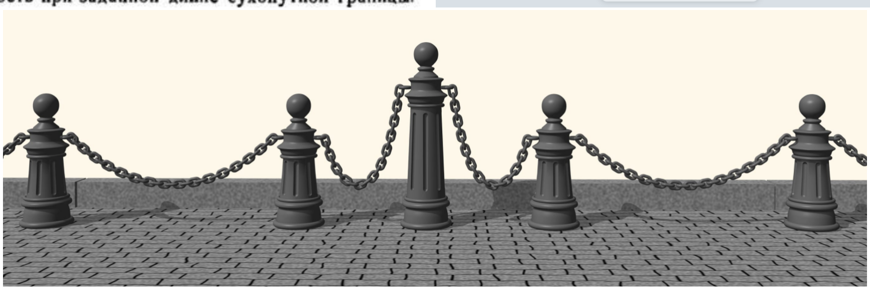
1. задача о брахистохроне (кривая наискорейшего спуска между фиксированными точками);
2. задача о цепной линии (какую форму примет тяжелая нить, если ее подвесить на 2 гвоздика?);
3. задача об идеальной арке (арки в Sagrada Familia в Барселоне, архитектор Гауди);
4. задача Дидоны (какой формы сделать город на берегу моря, чтобы площадь была максимальной при фиксированном периметре?);
5. изопериметрические задачи;
6. задача о поверхности минимального вращения (два колечка опускают в мыльную воду — какой формы будет мыльная пленка между ними?);
7. геодезические на многообразиях и в разных геометриях;
8. многие уравнения матфизики (законы сохранения, волновое уравнение, форма мембраны, форма мыльной пленки) выводятся из принципа наименьшего действия — природа среди всех состояний выбирает то, где энергия минимальна.
9. и т.д....





Фиг. 7-26. Участок земли, имеющий наибольшую ценность при заданной длине сухопутной границы.





Занятие 2, 24.02.2021. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Определяем характер экстремали — минимум vs максимум, локальный vs глобальный

1. Найдите стационарные точки функционала $J[y]$ и покажите, являются ли они локальными / глобальными минимумами или максимумами:

$$\text{А)}\quad J[y] = \int_a^b (x^2 + y^2 + yy')\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[a,b] :\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b\}$$

$$\text{Б)}\quad J[y] = \int_0^{2\pi} [(y'(x))^2 - y(x)^2]\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[0,2\pi] :\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0\}$$

$$\text{В)}\quad J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[0,1] :\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1\}$$

Hint: для определения, является ли точка локальным экстремумом (а не просто стационарной точкой), полезно посмотреть на $J[y+h] - J[y]$ и разложить подынтегральную функцию в ряд Тейлора до квадратичных по h и h' слагаемых, и изучить получившуюся квадратичную форму.

2. Рассмотрим на пространстве $X = C^1[a,b]$ две нормы:

$$\|f\|_1 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \qquad \|f\|_2 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Равносильны ли сходимости по этим нормам?
Hint: доказательство методом пристального разглядывания картинки 3.

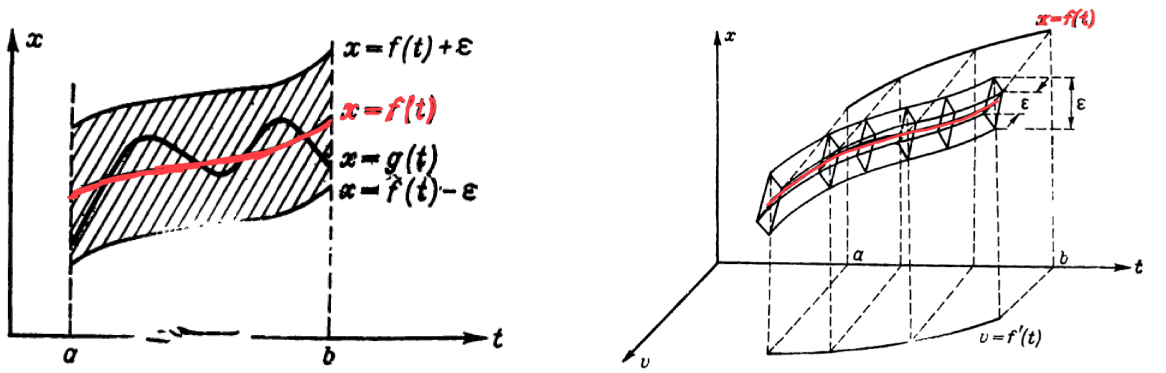


Рис. 3: Визуализация окрестности функции $f(x) \in C^1[a,b]$ в норме $\|\cdot\|_1$ и норме $\|\cdot\|_2$

Занятие 3, 03.03.2021. Задача со свободными концами + задачи на подготовку к КР

Как обычно, будем рассматривать функционал:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx, \tag{3}$$

но теперь не будем накладывать дополнительных ограничений на функцию y, т.е. пусть $y(x) \in C^1[a,b]$, а на краях функция может принимать любые значения. Это так называемая «задача со свободными концами».

1. Покажите, что если $y(x)$ — стационарная точка функционала $J[y]$, то выполнено уравнение Эйлера–Лагранжа + «дополнительные гран. условия»:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \qquad \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=a} = 0, \qquad \left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

   Эти условия еще называют *естественными граничными условиями*, т.к. они естественным образом вытекают из минимизации функционала.
   Как будет выглядеть задача, если закреплен только один конец?

2. Решите явно задачу о «брахистохроне», если Вам нужно наискорейшим образом спуститься из точки $(0,0)$ в какую-нибудь из точек на вертикальной прямой $x = b$.

3. Найдите стационарные точки функционала $J[y]$ (здесь везде $y = y(x)$):

$$\text{А)}\quad J[y] = \int_0^1 [y + xy' + (y')^2]\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[0,1] :\ y(0) = 0\}$$

$$\text{Б)}\quad J[y] = \int_0^1 (y'(x))^2\,dx - y^2(1), \qquad y \in X = \{y \in C^1[0,1], y(0) = 0\}$$

Подготовка к КР

На контрольной одна из задач будет такого типа («задача с закрепленными концами»). Начните готовиться уже сейчас!

(№1) Найдите стационарные точки функционала $J[y]$ (здесь везде $y = y(x)$):

$$\text{А)}\quad J[y] = \int_1^2 \frac{1}{x^2}(xy' - y)\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[1,2] :\ y(1) = 0, \quad y(2) = 2\}$$

$$\text{Б)}\quad J[y] = \int_e^{10} [2xy^2 + y'\ln(x)]\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[e,10] :\ y(e) = \frac{1}{4e^2}, \quad y(10) = 1\}$$

$$\text{В)}\quad J[y] = \int_1^2 (\ln(y') - 3yy' - xy')\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[1,2] :\ y(1) = -\ln(2), \quad y(2) = 0\}$$

$$\text{Г)}\quad J[y] = \int_0^{1/2} (y + xy' - \frac{1}{y}(y')^3)\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[0,1/2] :\ y(0) = 2/3, \quad y(1/2) = \sqrt{3/2}\}$$

$$\text{Д)}\quad J[y] = \int_{-1}^1 e^x((y')^2 + 6y^2)\,dx, \qquad y \in X = \{y \in C^1[-1,1] :\ y(-1) = 0, \quad y(1) = 2e^2 \operatorname{sh} 5\}$$

Занятие 4, 10.03.2021. Задачи на условный экстремум

Рассмотрим два функционала:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx, \qquad G[y] = \int_a^b M(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{4}$$

на некотором банаховом пространстве X. Часто возникает задача минимизации интегрального функционала $J[y]$ при условии $G[y] = 0$. Ее называют задачей на условный экстремум. История появления таких задач уходит далеко: началось все с изопериметрической задачи и задачи Дидоны.

Будем поступать также, как и в конечномерном случае — воспользуемся теоремой:

Теорема 1 (о множителя Лагранжа). *Пусть*

1. *$J, G \in C^1(X)$;*
2. *$u \in X$ — локальный экстремум J при условии $G = 0$;*
3. *u — не стационарная точка G.*

Тогда существует $\lambda \in \mathbb{R}$: $J'_F[u] = \lambda G'_F[u]$, т.е. $J'_F[u]y = \lambda G'_F[u]y$ для любого $y \in X$.

Геометрические задачи

1. **(задача Дидоны или какую максимальную площадь можно " окружить бычьей шкурой")** Финикийская царевна Дидона, спасаясь от преследований, ищет прибежище. Ей приглянулось одно место на побережье Тунисского залива. После переговоров с местным предводителем, ей разрешили взять столько земли, сколько можно "окружить бычьей шкурой". Итак, вопрос: сколько же земли можно окружить бычьей шкурой?
   Рассмотрим плоскость (x, y). Давайте для определенности считать, что при $y < 0$ — море, при $y > 0$ — суша. Пусть искомая кривая $y = y(x)$ — граница территории — соединяет точки $A = (-1, 0)$ и $B = (1, 0)$, а длина "бычьей шкуры" равна l. Будем рассматривать простой случай, когда l не очень большое (но больше 2), что позволяет считать, что $y = y(x)$ — график функции.

   А) Покажите, что задача Дидоны сводится к минимизации функционала $J[y]$ при условии $G[y] = l$, где

   $$J[y] = \int_{-1}^{1} y(x)\,dx, \qquad G[y] = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

   Б) Рассмотрите функционал Лагранжа $L[y] = J[y] + \lambda \cdot G[y]$ для некоторой константы $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажите, что вариация функционала $\delta L = 0$ означает, что выполнены следующие соотношения:

   $$\text{(Euler-Lagrange equation)} \qquad u(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} = c,$$

   $$\text{(condition)} \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx = l.$$

   Заметим, что с одной стороны, у нас появилась одна неизвестная λ, с другой стороны, появилось одно дополнительное соотношение.

   В) Найдите форму оптимальной кривой $y(x)$ (имеется в виду найти стационарные точки, удовлетворяющие условиям $y(-1) = 0$ и $y(1) = 0$).

   Г) Как поправить формулировку задачи и решение, чтобы учесть случай "длинной бычьей шкуры", допускающий, что y не обязательно функция от x?

   Д) А что, если точки A и B не закреплены и могут быть выбраны в любом месте на прямой $y = 0$. Как будет выглядеть решение задачи Дидоны в этом случае?

2. **(цепная линия)** Между точек $(1,0)$ и $(0,1)$ повесили тяжелую цепь длины $l > \sqrt{2}$, которая висит только под действием силы тяжести. Найдите ее форму $y = y(x)$.

   А) Покажите, что задача о цепной линии сводится к минимизации функционала $J[y]$ при условии $G[y] = l$ и $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, где

$$J[y] = \int\limits_0^1 y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx, \qquad G[y] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

   Б) Решите задачу на условный экстремум :)

Занятие 5, 17.03.2021. Задачи на условный экстремум

Доказательство неравенств и поиск точных констант в неравенствах

1. **(неравенство Фридрихса)**

   А) Докажите неравенство элементарными методами для некоторой константы C и функции $y \in X = \{y \in C^1[0,l] : y(0) = y(l) = 0\}$:

$$\int_0^l (y(x))^2\, dx \leqslant C \int_0^l (y'(x))^2\, dx. \tag{5}$$

   А является ли найденная константа оптимальной (самой лучшей из всех возможных)?

   Б) Давайте докажем неравенство (12) вариационными методами и найдем *точную константу* C. Действительно, запишем его следующим образом

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{\int_0^l (y'(x))^2\, dx}{\int_0^l (y(x))^2\, dx}. \tag{6}$$

   Заметим, что правая часть (24) инвариантна относительно умножения $y(x)$ на число k (и числитель, и знаменатель имеют одну и ту же степень однородности 2). Поэтому не умаляя общности можем зафиксировать знаменатель (например, положить равным 1). Тогда имеем

$$\frac{1}{C_{opt}} = \min J[y] = \int_0^l (y'(x))^2\, dx, \qquad \text{при условии} \int_0^l (y(x))^2\, dx = 1.$$

   Решите эту задачу на условный экстремум и найдите оптимальную константу C_{opt}.

   В) На какой функции y достигается равенство в неравенстве (12) при $C = C_{opt}$?

   Г) Найдите точную константу в неравенстве (12) для $y \in X' = \{y \in C^1[0,l] : y(0) = 0\}$. Обратите внимание, она будет не такой, как в пункте Б!

2. **(неравенство Пуанкаре)**

   А) Докажите элементарными методами, что для $y \in C^1[0,1]$ и некоторой константы C выполняется неравенство:

$$\int_0^1 (y(x))^2\, dx \leqslant C \left(\int_0^1 (y'(x))^2\, dx + \left(\int_0^1 y(x)\, dx \right)^2 \right). \tag{7}$$

   Замечание: часто неравенством Пуанкаре называется следующая формулировка, которая незамедлительно следует из (28):
   Пусть $y \in C^1[0,1]$ с нулевым средним, т.е. $\int_0^1 y(x)\, dx = 0$. Тогда выполнено неравенство (12).

   Б) Докажем неравенство (28) вариационными методами, и более того, найдем точную константу C. Поступим аналогично задаче про неравенство Фридрихса. Покажите, что значение оптимальной константы C_{opt} можно найти следующим образом:

$$\frac{1}{C_{opt}} = \min J[y] = \int_0^l (y'(x))^2\, dx + \left(\int_0^1 y(x)\, dx \right)^2, \qquad \text{при условии} \int_0^l (y(x))^2\, dx = 1.$$

   Решите эту задачу на условный экстремум и найдите оптимальную константу C_{opt}.

Занятие 6, 24.03.2021. Задачи на условный экстремум. Разбор предыдущих серий.

Занятие 7, 31.03.2021. Условия трансверсальности

1. Найдите расстояние между кривыми $y = x^2$ и $x^2 - y^2 = 5$ на плоскости $\mathbb{R}^2$.

2. Найдите экстремали функционала:

$$J[y] = \int\limits_{(0,0)}^{A} \frac{1}{x} \cdot (y'(x))^2 \, dx,$$

где A расположена на кривой $y = x^3 + 1$.

3. Найдите расстояние между точкой $(0, 1)$ и прямой $y = kx$ в верхней полуплоскости с геометрией Лобачевского.

Замечание: длина кривой $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, в геометрии Лобачевского задается функционалом:

$$L[y] = \int\limits_{a}^{b} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{y(x)} \, dx$$

Давайте считать, что в задаче достаточно найти точки локального минимума функционала (то, что это глобальный минимум нужно будет доказать в задаче на рейтинг, а сейчас будем считать это правдой).

Занятие 8, 07.04.2021. Граничные условия и их модификации. Задача Больца.

Задачей Больца называют поиск минимума следующего функционала:

$$J[y] = \int\limits_{a}^{b} L(x, y(x), y'(x)) \, dx + f(y(a), y(b)), \tag{8}$$

на множестве $y \in X$ (обычно $X = C^1(a, b)$).

1. Найдите экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} ((y'(x))^2 - y(x)) \, dx + y^2(1).$$

Занятие 9, 14.04.2021. Разбор ДЗ 9.

Занятие 10, 21.04.2021. Разбор упражнений с лекций.

Занятие 11, 28.04.2021. Функционалы со старшими производными. Разбор ДЗ 10.

Занятие 12, 05.05.2021. Разбор КР (написание 1).

Занятие 13, 12.05.2021. Многомерные вариационные задачи.

Будем рассматривать $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $u : \Omega \to \mathbb{R}$. "Многомерность" появляется, например, когда мы добавляем в рассмотрение не только пространственную переменную x, но и время t, как в случае колебания струны (см. задачу 1), или при рассмотрении многомерных областей, как в случае формы, которую принимает мыльная пленка, при опускании проволоки в мыльную воду (см. задачу 2). В общем случае функционал выглядит следующим образом:

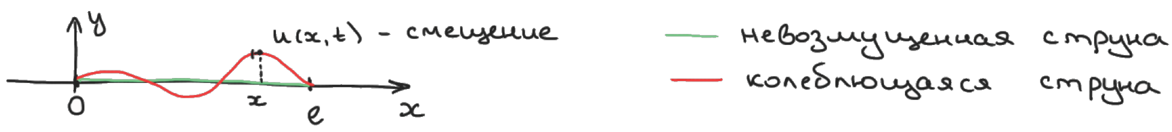
$$J[u] = \int\limits_{\Omega} L(x_1, \ldots, x_n, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})\, dx, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{9}$$

но мы будем рассматривать $n = 2$. Часто в основе лежит так называемый принцип наименьшего действия.

Принцип наименьшего действия: Пусть T — кинетическая энергия, а U — потенциальная энергия, тогда физическая система движется так, что минимизируется функционал наименьшего действия:

$$E[u] = \int\limits_{\Omega} (T(x) - U(x))\, dx, \qquad x \in \Omega.$$

1. **(колебания струны)** Пусть есть струна в плоскости XOY, закрепленная с двух сторон в точках $(0,0)$ и $(l,0)$. Мы хотим изучать, как будет двигаться струна со временем, если вывести ее из положения равновесия или придать ей импульс. Пусть $u = u(x,t)$ — смещение струны в точке x и момент времени t относительно положения равновесия (горизонтальный отрезок между закрепленными точками).



   А) Покажите, что функционал наименьшего действия "в первом приближении" (если смещение u достаточно мало) можно записать следующим образом:

$$E[u] = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_0^l (\rho u_t^2 - T_0 u_x^2)\, dx\, dt,$$

   где $\rho \in \mathbb{R}_+$ — плотность струны (для простоты считаем константой), $T_0 \in \mathbb{R}_+$ — константа.

   Б) Покажите, что экстремали удовлетворяют следующему уравнению Эйлера–Остроградского:

$$\rho u_{tt} - T_0 u_{xx} = 0. \tag{10}$$

   Это уравнение называют уравнением колебания струны. Это частный случай волнового уравнения, которое будет подробно изучаться в курсе матфизики.

   В) (для желающих) Покажите, что общее решение уравнения (10) являются суммой двух бегущих волн, а именно, для некоторых функций f и g верно:

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt),$$

   где v — скорость бегущей волны, $v^2 = \frac{T_0}{\rho} \neq 0$.

2. **(форма мыльной пленки)** Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Будем считать, что над каждой точкой $x \in \Omega$ находится единственная точка "мыльной пленки". Будем обозначать высоту этой точки — $u(x_1, x_2)$ (см. рис. 4). Будем считать, что пленка уже пришла в равновесие и находится в стационарном состоянии (ее форма не зависит от времени).

   А) Покажите, что функционал наименьшего действия "в первом приближении" (если смещение u достаточно мало) можно записать следующим образом:

$$E[u] = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)\, dx, \qquad x = (x_1, x_2).$$

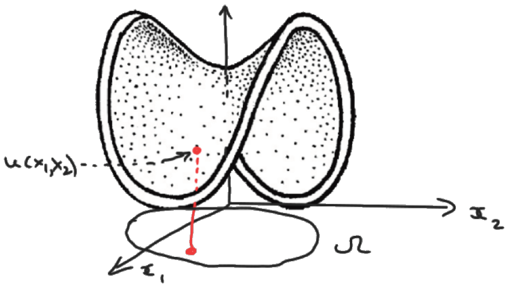


Рис. 4: Форма мыльной пленки на проволоке

Б) Покажите, что экстремали удовлетворяют следующему уравнению Эйлера–Остроградского:

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0. \tag{11}$$

Оператор Δ называется оператором Лапласа и часто встречается в самых разных контекстах. Уравнение (11) — частный случай эллиптического уравнения, которое будет подробно изучаться в курсе матфизики. Решения уравнения $\Delta u = 0$ называются гармоническими функциями.

Занятие 14, 19.05.2021. Разбор КР (написание 2).

3 Домашние задания

ДЗ 1. Дедлайн: 24.02.2021. Простейшие задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Лагранжа

1. **Задача о мыльной пленке или о минимальной площади поверхности.**
В трехмерном пространстве расположены 2 кольца $C_1 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = A^2, x = 0\}$ и $C_2 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = B^2, x = b\}$. Какой формы образуется мыльная пленка между кольцами после опускания их в мыльную воду? Отметим, что за счет поверхностного натяжения пленка стремится принять ту форму, у которой минимальная площадь поверхности. Будем искать ответ только среди поверхностей вращения.

   А) Покажите, что задача о мыльной пленке сводится к минимизации следующего функционала:
$$J[y] = \int_0^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx,$$
где $y(x)$ — это график функции, вращением которого вокруг оси OX образована поверхность.

   Б) Покажите, что вариация этого функционала $\delta J(y, h)$ равна 0 равносильно следующему ODE (для некоторой константы c):
$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

   В) Решите ODE из пункта Б). Что это за кривая?

2. **Задача о брахистохроне.** Пусть Вам нужно спуститься из точки $A = (0, a)$ в точку $B = (b, 0)$. Какой кривой нужно соединить эти точки, чтобы спускаясь по ней «как с горки» только под действием силы тяжести и без трения прийти как можно быстрее в точку B?

   А) Покажите, что задача о брахистохроне сводится к минимизации следующего функционала:
$$J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{a - y}}\, dx$$
на множестве $X = \{y : [0, b] \to \mathbb{R} :\ y(x) \in C^1[0, b],\ y(0) = a,\ y(b) = 0\}$.

   Б) Покажите, что вариация этого функционала $\delta J(y, h)$ равна 0 равносильно следующему ODE (для некоторой константы c):
$$(a - y) \cdot (1 + y'(x)^2) = c.$$
Что можно сказать про производную $y'(x)$ в точке $x = a$?

   В) Решите ODE из пункта Б). Что это за кривая?
Hint: сделайте замену $y := \frac{c}{2}(1 - \cos(\varphi))$.

P.S. Красивое решение задачи о брахистохроне через законы геометрической оптики (законы Снелиуса) можно посмотреть на канале 3blue1brown: https://www.youtube.com/watch?v=Cld0p3a43fU

ДЗ 2. Дедлайн: 03.03.2021. Ищем экстремали. Определяем — минимум vs максимум, локальный vs глобальный

1. Найдите стационарные точки функционала $J[y]$ и покажите, являются ли они локальными / глобальными минимумами или максимумами:

$$\text{А)}\quad J[y]=\int\limits_a^b (x^2+y^2+yy')\,dx,\qquad y\in X=\{y\in C^1[a,b]:\ y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b\}$$

$$\text{Б)}\quad J[y]=\int\limits_0^{2\pi} [(y'(x))^2-y(x)^2]\,dx,\qquad y\in X=\{y\in C^1[0,2\pi]:\ y(0)=0,\quad y(2\pi)=0\}$$

Hint: для определения, является ли точка локальным экстремумом (а не просто стационарной точкой), полезно посмотреть на $J[y+h]-J[y]$ и разложить подынтегральную функцию в ряд Тейлора до квадратичных по h и h' слагаемых, и изучить получившуюся квадратичную форму.

ДЗ 3. Дедлайн: 10.03.2021. Задача со свободными концами

1. Решите явно задачу о «брахистохроне», если Вам нужно наискорейшим образом спуститься из точки $(0,0)$ в какую-нибудь из точек на вертикальной прямой $x=b$.
Напоминание: с занятий мы знаем, что общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа может быть запараметризовано следующим образом (семейство циклоид):

$$x(\varphi)=C_1\cdot(\varphi+\sin(\varphi))+C_2,$$
$$y(\varphi)=C_1\cdot(1+\cos(\varphi)).$$

2. Найдите ВСЕ стационарные точки функционала $J[y]$ (здесь везде $y=y(x)$):

$$\text{А)}\quad J[y]=\int\limits_0^1 [y+xy'+(y')^2]\,dx,\qquad y\in X=\{y\in C^1[0,1]:\ y(0)=0\}$$

$$\text{Б)}\quad J[y]=\int\limits_0^1 (y'(x))^2\,dx-y^2(1),\qquad y\in X=\{y\in C^1[0,1]:\ y(0)=0\}$$

ДЗ 4. Дедлайн: 17.03.2021. Задачи на условный экстремум

1. **(задача Дидоны)**
Рассмотрим плоскость (x, y). Давайте для определенности считать, что при $y < 0$ — море, при $y > 0$ — суша. Пусть искомая кривая $y = y(x)$ — граница территории — соединяет точки $A = (-1, 0)$ и $B = (1, 0)$, а длина "бычьей шкуры" равна l. В случае не очень длинной "бычьей шкуры" ($l \in [2, \pi]$) задача Дидоны сводится к минимизации функционала $J[y]$ при условии $G[y] = l$, где

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} y(x)\,dx, \qquad G[y] = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

для $y \in X = \{y \in C^1[-1, 1] : y(-1) = y(1) = 0\}$.

   А) На паре мы забыли проверить важное условие применимости теоремы о множителях Лагранжа, а именно, что $G'_F[y_0] \neq 0$, где y_0 — найденная стационарная точка функционала Лагранжа. Проверьте.

   Б) (для желающих) Как поправить формулировку задачи и решение задачи Дидоны, чтобы учесть случай "длинной бычьей шкуры" $l > \pi$?

   В) (для желающих) А что, если точки A и B не закреплены и могут быть выбраны в любом месте на прямой $y = 0$. Сформулируйте строгую постановку задачи Дидоны и решите ее.

2. **(цепная линия)** Между точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$ повесили тяжелую цепь длины $l > \sqrt{2}$, которая висит только под действием силы тяжести. Найдите ее форму $y = y(x)$.

   А) Покажите, что задача о цепной линии сводится к минимизации функционала $J[y]$ при условии $G[y] = l$ и $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, где

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx, \qquad G[y] = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

   Б) Решите задачу на условный экстремум, т.е. найдите стационарные точки функционала Лагранжа и проверьте допустимость применения теоремы Лагранжа.

ДЗ 5. Дедлайн: 24.03.2021. Задачи на условный экстремум
Доказательство интегральных неравенств и поиск точных констант

1. **(неравенство Фридрихса)**

   А) Докажите неравенство элементарными методами для некоторой константы C и функции $y \in X = \{y \in C^1[0, l] : y(0) = y(l) = 0\}$:

   $$\int_0^l (y(x))^2\, dx \leqslant C \int_0^l (y'(x))^2\, dx. \tag{12}$$

   А является ли найденная константа оптимальной (самой лучшей из всех возможных)?

   Б) Давайте докажем неравенство (12) вариационными методами и найдем *точную константу* C. Действительно, запишем его следующим образом

   $$\frac{1}{C} \leqslant \frac{\int_0^l (y'(x))^2\, dx}{\int_0^l (y(x))^2\, dx}. \tag{13}$$

   Заметим, что правая часть (24) инвариантна относительно умножения $y(x)$ на число k (и числитель, и знаменатель имеют одну и ту же степень однородности 2). Поэтому не умаляя общности можем зафиксировать знаменатель (например, положить равным 1). Тогда имеем

   $$\frac{1}{C_{opt}} = \min J[y] = \int_0^l (y'(x))^2\, dx, \qquad \text{при условии} \int_0^l (y(x))^2\, dx = 1.$$

   Решите эту задачу на условный экстремум и найдите оптимальную константу C_{opt}.

   В) На какой функции y достигается равенство в неравенстве (12) при $C = C_{opt}$?

   Г) (для желающих) найдите точную константу в неравенстве (12) для $y \in X' = \{y \in C^1[0, l] : y(0) = 0\}$. Обратите внимание, она будет не такой, как в пункте Б!

2. (для желающих) Решите задачу Дидоны «с закрепленными концами» (как говорили на лекции, жрецы поставили камни в точках А и В на берегу моря) для произвольной длины бычьей шкуры (случай $l > \pi$).
   На занятии мы обсудили, что задача сводится к следующей формулировке:
   найдите минимум функционала $J[x, y]$ (функционал площади) при условии, что $G[x, y] = l$ (функционал длины бычьей шкуры), где

   $$J[x, y] = \int_0^1 y(t)x'(t)\, dt, \qquad G[x, y] = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

   на пространстве $X = \{(x(t), y(t)) : x, y \in C^1[0, 1],\ x(0) = -1, y(0) = 0, x(1) = 1, y(1) = 0, y \geqslant 0\}$.

ДЗ 6. Дедлайн: 31.03.2021. Функционалы на кривых. Условие трансверсальности

На примере задачи Дидоны мы поняли, что часто необходимо и полезно рассматривать функционалы «на кривых». Будем искать минимум функционала:

$$J[\gamma] = \int\limits_a^b \mathcal{F}(\gamma, \gamma')\, dx$$

на кривых γ из множества:

$$X := \{\gamma \in \Gamma_n^2 : \gamma(a) \in M_1, \gamma(b) \in M_2\},$$

где M_1, M_2 — гладкие многообразия в $\mathbb{R}^n$. Напомню, что Γ_n^k — это класс эквивалентности параметризованных кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^k[a, b]$. Т.о. левый конец кривой не зафиксирован, а «гуляет» по многообразию M_1, а правый конец «гуляет» по многообразию M_2 (см. рис. ниже).
NB: на функцию $\mathcal{F}$, помимо условий гладкости, необходимо накладывать условие однородности по w:

$$\mathcal{F}(z, \lambda w) = \lambda \mathcal{F}(z, w). \tag{14}$$

Именно это условие обеспечивает независимость функционала от выбора параметризации кривой γ.

Теорема 2 (Теорема 3.12 с лекций)**.** *Пусть γ_0 — локальный экстремум функционала J на множестве X. Тогда:*

(уравнение Эйлера) $$\nabla_z \mathcal{F} - \frac{d}{dt}\nabla_w \mathcal{F} = 0 \tag{15}$$

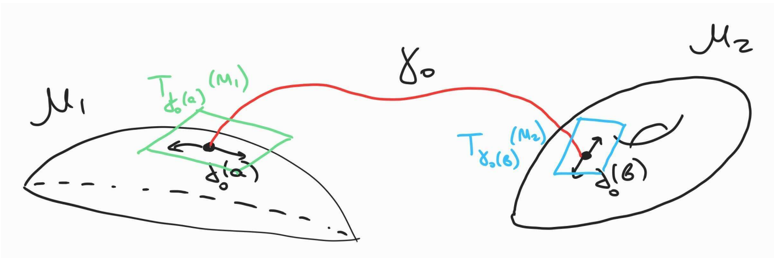
(условие трансверсальности в a) $$\nabla_w \mathcal{F}\big|_{\gamma=\gamma(a)} \perp T_{\gamma(a)}(M_1) \tag{16}$$

(условие трансверсальности в b) $$\nabla_w \mathcal{F}\big|_{\gamma=\gamma(b)} \perp T_{\gamma(b)}(M_2) \tag{17}$$

NB: очень часто условия трансверсальности равносильны тому, что кривая γ «входит ортогонально» в поверхность M_1 и M_2, т.е.

$$\gamma'(a) \perp T_{\gamma(a)}(M_1) \qquad \gamma'(b) \perp T_{\gamma(b)}(M_2) \tag{18}$$

Обращаю Ваше внимание, что это не всегда так! Об этом задача 3 (для желающих, поговорим об этом на следующей паре).



1. (дорешиваем задачу Дидоны в случае незакрепленных концов)
   Напомню, что задача Дидоны свелась к поиску стационарной точки функционала Лагранжа:

   $$\mathcal{L}[x(t), y(t)] = \int\limits_0^1 (y\dot{x} - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})\, dt. \tag{19}$$

   Мы ищем минимум этого функционала на множестве кривых $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \subset \mathbb{R}^2$, что $\gamma(a) \in \{y = 0\}$ и $\gamma(b) \in \{y = 0\}$.

   А) Мы забыли проверить условие (14) для функционала Лагранжа $\mathcal{L}$ из (19). Хоть это достаточно тривиально, но проверьте.

   Б) Поймите, что означают условия трансверсальности (16)–(17) и найдите форму кривой γ_0, подозрительной на экстремум (то, что это настоящий максимум, мы не доказываем).

2. А) Решите честную изопериметрическую задачу: найдите форму замкнутой кривой фиксированной длины l, которая ограничивает наибольшую площадь.

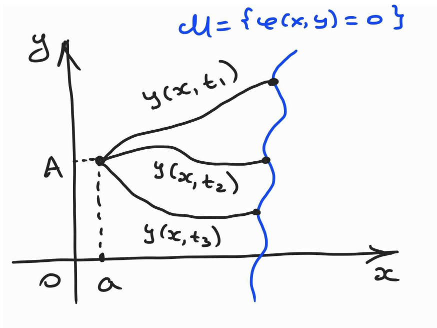
   Б) Решите двойственную задачу: найдите форму замкнутой кривой, ограничивающей фиксированную площадь S, которая имеет наименьшую длину.

3. (для желающих) Найдите условия на функцию $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\gamma, \gamma')$, при которых условия трансверсальности (16)–(17) равносильны условиям ортогональности (18).

ДЗ 7. Дедлайн: 07.04.2021. Условие трансверсальности — и продолжаем

До текущего момента мы рассматривали очень общее условие трансверсальности (функционалы на кривых γ). А как выглядит условие трансверсальности для функционалов на функциях $y = y(x)$? Раньше мы рассматривали функционал на функциях y

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx,$$



для $y \in X = \{y : [a,b] \to \mathbb{R}, y \in C^1[a,b], y(a) = A, y(b) = B\}$, т.е. задачу с закрепленными концами. Теперь рассмотрим

$$J[y(x,t)] = \int\limits_a^{b(t)} L(x, y(x,t), y'(x,t))\,dx, \tag{20}$$

для $y \in X = \{y : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \in C^1[a,b]\times\mathbb{R}, y(a,t) = A, y(b(t),t) \in \mathcal{M}\}$, где $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \varphi(x,y) = 0\}$. Т.е. левый конец закреплен, а правый конец «бегает» по кривой $\mathcal{M}$.

1. Пусть $y(x,0)$ — локальный экстремум функционала (20). Покажите, что тогда выполнено уравнение Эйлера и условия трансверсальности:

$$L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = 0 \qquad\qquad \left.\frac{L_{y'}}{\varphi_y}\right|_{t=0} = \left.\frac{L - y'L_{y'}}{\varphi_x}\right|_{t=0} \tag{21}$$

   P.S. Можно поступать по-разному: либо воспользоваться общим видом условий трансверсальности, либо вывести с нуля из условия:

$$\left.\frac{d}{dt}J[y(x,t)]\right|_{t=0} = 0.$$

   Полезно понять оба способа! В частности,

   если конец кривой $y(b(t),t)$ лежит на прямой $x = x_0$, то условие (21) упрощается:

$$\left.L_{y'}\right|_{x=x_0} = 0.$$

   если конец кривой $y(b(t),t)$ лежит на прямой $y = y_0$, то условие (21) упрощается:

$$\left.L - y'L_{y'}\right|_{y=y_0} = 0.$$

2. Найдите экстремали функционала:

$$J[y] = \int\limits_{(0,0)}^{A} \frac{1}{x}\cdot(y'(x))^2\,dx,$$

   где A расположена на кривой $y = x^3 + 1$. Воспользуйтесь условиями трансверсальности (21).

3. Найдите расстояние между точкой $(0,1)$ и прямой $y = kx$ в верхней полуплоскости с геометрией Лобачевского.

   Замечание: длина кривой $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, в геометрии Лобачевского задается функционалом:

$$L[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{y(x)}\,dx$$

   Давайте считать, что в задаче достаточно найти точки локального минимума (то, что это глобальный минимум нужно будет доказать в задаче на рейтинг, а сейчас будем считать это правдой).

4. (для желающих) Верно ли, что общие условия трансверсальности для функционалана кривых $J[\gamma]$ равносильны условиям ортогональности тогда и только тогда, когда

$$J[\gamma] = \int\limits_a^b f(t, \gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\,dt? \tag{22}$$

ДЗ 8. Дедлайн: 14.04.2021. 3 в 1: Задача Больца + доказательство неравенств + ЗШЛ

1. Мы когда-то доказывали одномерное неравенство Фридрихса: для функций $y \in X = \{y \in C^1[0,l] : y(0) = y(l) = 0\}$ выполнено

$$\int_0^l (y(x))^2\,dx \leqslant \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \int_0^l (y'(x))^2\,dx, \tag{23}$$

причем l^2/π^2 — точная константа в неравенстве. Также мы показали, что если отказаться от одного из условий, скажем, $y(l) = 0$, то неравенство останется верным, но точная константа изменится, а именно:

$$\int_0^l (y(x))^2\,dx \leqslant \frac{4l^2}{\pi^2} \cdot \int_0^l (y'(x))^2\,dx. \tag{24}$$

А) Покажите, что если отказаться от обоих условий $y(0) = 0$ и $y(l) = 0$, то какую бы константу мы не брали, неравенство (23) не будет верным.

Б) Давайте подправим неравенство. Покажите, что для функций $y \in C^1[0,l]$ выполнено

$$\int_0^l (y(x))^2\,dx \leqslant C \cdot \left(\int_0^l (y'(x))^2\,dx + y^2(0) \right), \tag{25}$$

и найдите точную константу C_{opt}.

NB: давайте действовать пошагово:

Шаг 1: сведите задачу к вариационной, т.е. покажите, что задача сводится к минимизации функционала Лагранжа:

$$L[y] = \int_0^l \left[(y'(x))^2 - \lambda (y(x))^2 \right]\,dx + (y(0))^2. \tag{26}$$

Получили задачу Больца (с внеинтегральными слагаемыми от $y(0)$)!

Шаг 2: распишите честно первую вариацию, выведите уравнение Эйлера-Лагранжа, и правильные гран условия.

Шаг 3: решите получившуюся краевую задачу (к нашей радости, это еще один пример ЗШЛ!). Не удивляйтесь, если константа не найдется явно. В любом случае, уравнение на константу нужно выписать, и понять, что у него есть решения.

Шаг 4: не забудьте проверить, что выполняются условия теоремы о множителях Лагранжа.

Шаг 5: (для желающих) покажите, что найденные в шаге 3 решения, действительно минимайзеры, а не просто критические точки функционала (26).

ДЗ 9. Дедлайн: 21.04.2021. ЗШЛ = Задача Штурма–Лиувилля

1. Решите следующие задачи Штурма-Лиувилля, т.е. найдите все собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathcal{L}y = -y''$:

$$\text{(ND)} \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y(l) = 0. \end{cases} \qquad \text{(DN)} \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y'(l) = 0. \end{cases} \qquad \text{(NN)} \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y'(l) = 0. \end{cases}$$

   Область определения оператора $\mathcal{L}$ будем считать
   $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) = \{y \in C^2[0,l] :\ y$ удовлетворяет правильным г.у.$\}$.

   Все собственные числа и собственные функции можно найти явно.

   На занятии мы рассматривали пример:

$$\text{(DD)} \begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(l) = 0. \end{cases}$$

2. Решите задачу Штурма-Лиувилля, т.е. найдите все собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и собственные функции $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathcal{L}y = -y''$:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = sy'(0), \\ y(l) = ty'(l), \end{cases}$$

   для всех значений параметров $s, t \in [-\infty, +\infty]$. Сколько максимум отрицательных чисел может быть? Покажите, когда этот максимум реализуется.

   Заметим, что

   - параметры $s = 0, t = 0$ соответствуют примеру (DD)
   - параметры $s = 0, t = \pm\infty$ соответствуют примеру (DN)
   - параметры $s = \pm\infty, t = 0$ соответствуют примеру (ND)
   - параметры $s = \pm\infty, t = \pm\infty$ соответствуют примеру (NN)

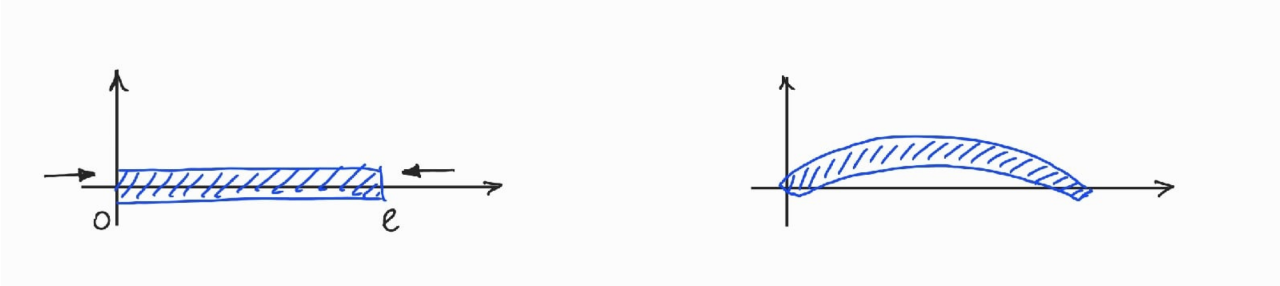
   Покажите, что при $s = 0$ и непрерывном изменении параметра t от 0 до $+\infty$ собственные числа непрерывно переходят из собственных числе задачи (DD) в собственные числа задачи (DN).
   Покажите, что при $t = +\infty$ и непрерывном изменении параметра s от 0 до $+\infty$ собственные числа непрерывно переходят из собственных числе задачи (DN) в собственные числа задачи (NN).

ДЗ 10. Дедлайн: 28.04.2021. Функционалы со старшими производными

1. Найдите все $\lambda \in \mathbb{R}$ такие, что стационарные точки функционала $J[y]$ не вырождены:

$$J[y] = \int\limits_0^l \left[(y''(x))^2 - \lambda(y'(x))^2\right] dx. \tag{27}$$

Считаем, что функционал определен на множестве $X = \{y \in C^4[0,l] : y(0) = y(l) = 0\}$.
P.S. В задаче нужно вывести правильное уравнение Эйлера-Лагранжа и граничные условия на функцию y (полезно интегрировать по частям!). Полученное дифференциальное уравнение будет похоже на ЗШЛ (хотя, формально говоря, ей не является) и нужно найти все λ, при которых решение $y(x)$ не тождественный ноль.
P.S.S. Функционал (27) отвечает функционалу энергии для жесткого стержня с двумя закрепленными концами при его продольном сжатии. Минимальное положительное λ отвечает критической нагрузке, при применении которой стержень начнет изгибаться.



4 Список упражнений с лекций

(L1) Есть функционал J в нормированном пространстве X. Если у него в какой-то точке есть производная по Фреше, то есть и производная по Гато, и они равны.

(L2) Обратное неверно: если в точке есть производная по Гато по всем направлениям, то производной по Фреше может и не быть.

(L3) В пространстве $C^1[a,b]$ введем норму $\|f\|_{C^1} = \max|f(x)| + \max|f'(x)|$. Докажите, что это норма.

(L4) Докажите, что $C^1[a,b]$ — банахово пространство.

(L5) Пусть $J[y] = \int_a^b L(x,y,y')\,dx$, $L \in C^1([a,b]\times\mathbb{R}^{2n})$. Тогда, конечно,

$$J'_F[y]h = \int_a^b (\langle \nabla_y L, h\rangle + \langle \nabla_v L, h'\rangle)\,dx.$$

Докажите, что отображение $y \mapsto J'_F[y]$ непрерывно (как отображение из X в X^*, $X = C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$).

(L6) $f \in L_1(a,b)$ такова, что $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ при всех $h \in C_0^\infty(a,b)$. Докажите, что $f = 0$.

(L7) (Обобщенная лемма Д-Р). $g \in C[a,b]$ такова, что $\int_a^b g(x)h''(x)\,dx = 0$ при всех $h \in C^2[a,b]$ таких, что $h(a) = h'(a) = h(b) = h'(b) = 0$. Докажите, что $g(x) = Ax + b$.

(L8) $g \in C[a,b]$ такова, что $\int_a^b g(x)h^{(k)}(x)\,dx = 0$ при всех $h \in C^k[a,b]$ таких, что

$$h(a) = h'(a) = ... = h^{(k-1)}(a) = h(b) = h'(b) = ... = h^{(k-1)}(b) = 0.$$

Докажите, что g — полином, степени не выше $k-1$.

Теорема 2.7 (о множителях Лагранжа)
Пусть X — нормированное линейное пространство, на котором заданы функционалы $J, G_1, \ldots, G_m \in C^1(X)$. Пусть

$$M = \{f \in X \,:\, G_1[f] = \ldots = G_m[f] = 0\},$$

u — локальный экстремум J на M. Обозначим через $\vec{G} : X \to \mathbb{R}^m$ оператор, составленный покомпонентно из G_i. Предположим, что $\operatorname{Im}\vec{G}'[u] = \mathbb{R}^m$. Тогда найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, что

$$\delta(J + \lambda_1 G_1 + \ldots + \lambda_m G_m)(u, y) = 0$$

для всех $y \in X$.

(L9) Пусть $G_1, \ldots, G_m \in C^1(X)$, $u \in M$, $\operatorname{Im}\vec{G}'[u] = \mathbb{R}^m$. Пусть $h \in X$ такого, что

$$G'_1[u]h = G'_2[u]h = \ldots = G'_m[u]h = 0.$$

Докажите, что тогда существует кривая $\omega \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon), X)$, образ которой лежит в M, а также выполнены условия $\omega(0) = u$ и $\omega'(0) = h$.

(L10) Покажите, что если u — локальный экстремум J на M, h — касательный вектор к M, то $\delta J(u,h) = 0$.

(L11) С помощью (L9) и (L10) докажите Теорему 2.7.

(L12) Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \partial\Omega$ и

$$\varphi(x) = \int_\Gamma \frac{\sigma(y)\,dS(y)}{|x-y|}.$$

Тогда $\Delta\varphi(x) = 0$ при всех $x \in \Omega$ (т.е. φ — гармоническая функция в Ω).

(L13) Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ в Ω и $u = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда $u \equiv 0$ в Ω.
Замечание: это называют принципом максимума для гармонических функций.

(L14) Пусть $\varphi(x)$ — функция из задачи (L12). Тогда если $\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2}$ для всех $x \in \Gamma$, то $\varphi(x) = -\frac{\lambda}{2}$ во всей области Ω (т.е. потенциал постоянен во всем проводнике).

(L15) Докажите, что если λ не является собственным числом однородной задачи Штурма–Лиувилля, то для любой функции $f \in C[a,b]$ и любых чисел $A, B \in \mathbb{R}$ существует и единственное решение y неоднородной задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered} -(py')' + (\lambda - q)y = f, \\ y(a) = A, \quad y(b) = B. \end{gathered}$$

Это частный случай так называемой альтернативы Фредгольма (она была у вас на алгебре для конечномерного случая, и когда-нибудь будет на функциональном анализе и спектральной теории операторов).

(L16) Покажите, что для ЗШЛ:

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda y, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

асимптотика собственных чисел равна

$$\lambda_k = Cn^2 + O(1), \qquad k \to +\infty,$$

где

$$C = \frac{\pi^2}{\left(\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}\right)^2}.$$

(L17) Пусть $f, g \in C^1(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} f g\, \nu_j(x)\, dS(x),$$

где $\nu(x)$ — единичная внешняя нормаль.

(L18) Пусть $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} u(x)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \langle u(x), \nu(x)\rangle\, dS(x).$$

(формула Гаусса-Остроградского)

5 Контрольные работы

Контрольная работа, 30.04.2021. Написание 1

Найдите допустимые экстремали при указанных условиях:

$$1)\ J[y] = \int\limits_0^1 \Big[y''^2 + 2y\Big]dx + y'(1), \qquad y(1) = 0,\ y'(0) + 2y(0) = 0;$$

$$2)\ J[y,z] = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y'z' + yz\right]dx, \qquad y(0) = z(0) = 0,\ y(1) = \operatorname{sh} 1,\ z(1) = -\operatorname{ch} 1.$$

3) Найдите кривую, соединяющую прямые $x = -1$ и $x = 1$, ограничивающую вместе с ними и осью абсцисс наибольшую площадь, при условии, что сумма длины кривой и ординат концов равна $l > \pi$.

4) Найдите расстояние между кривыми

$$2y = x^2, \qquad (x-6)^2 + y^2 = 5.$$

5) Найдите собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} (xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \\ y'(a) = y'(b) = 0, \quad b > a > 0. \end{cases}$$

Контрольная работа, 14.05.2021. Написание 2

Найдите экстремали функционала функционалов при указанных условиях

$$1)\ J[y] = \int\limits_0^1 \left[y''^2 + 2yy'\right]dx + 8y'(1)^2, \qquad y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 1;$$

$$2)\ J[y,z] = \int\limits_0^1 \Big[y'^2 + y'z' - 4xz' - 4z\Big]dx, \qquad y(0) = z(0) = 0,\ y(1) = z(1) = 1.$$

3) Найдите кривую, которая начинается в точке $(0, 1)$, заканчивается на оси абсцисс, ограничивает с осями координат площадь S, а площадь поверхности фигуры вращения этой кривой вокруг оси абсцисс наименьшая.

4) Найдите расстояние между кривыми

$$y = x^2 + 1, \qquad x = y^2 + 1.$$

5) Найдите собственные числа и собственные функции следующей задачи

$$\begin{cases} -y'' + y = \lambda y, \\ y(0) = iy(1), \\ y'(0) = -y'(1). \end{cases}$$

6 Листочек на рейтинг

Листочек на рейтинг. Выдан: 13.04.2021. Дедлайн: 01.05.2021, 23:59

1. **[2]** Найдите геодезическую, соединяющую точки $A = (a, y_a)$ и $B = (b, y_b)$ верхней полуплоскости в геометрии Лобачевского. Напомним, что расстояние вдоль кривой $\gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, задающейся графиком функции $y = y(x)$, считается по формуле:

$$\rho_{Lob}(A, B) = \int\limits_{\gamma} \frac{ds}{y} = \int\limits_{a}^{b} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y(x)}\, dy =: J[y].$$

Покажите, что стационарные точки функционала длины (они были найдены на практических занятиях) дают глобальные минимумы.

Замечание: возможно как элементарное решение, так и решение, использующее вторую вариацию. Если будете использовать вторую вариацию, сформулируйте точное утверждение, которое собираетесь применять.

2. **[1]** Функция $g \in C[a, b]$ такова, что $\int_a^b g(x) h^{(k)}(x)\, dx = 0$ при всех $h \in C^k[a, b]$ таких, что

$$h(a) = h'(a) = ... = h^{(k-1)}(a) = h(b) = h'(b) = ... = h^{(k-1)}(b) = 0.$$

Докажите, что g — полином степени не выше $k - 1$.

3. **[1]** В гильбертовом пространстве l_2 со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ на множестве финитных последовательностей задан линейный оператор A

$$(A\vec{x})_k = k x_k, \qquad \mathrm{Dom}\, A = \{\vec{x} \in l_2 : \#\{k \in \mathbb{N} : \, x_k \neq 0\} < \infty\}.$$

   А) Докажите, что оператор A — симметричный

   Б) Найдите сопряженный оператор A^* (как действует и какова область определения $\mathrm{Dom}\, A^* \subset l^2$).

4. **[2]** Неравенство Виртингера (одномерное неравенство Пуанкаре).

Докажите вариационными методами, что для $y \in C^1[0, 1]$ и некоторой константы C выполняется неравенство:

$$\int\limits_0^1 (y(x))^2\, dx \leqslant C \left(\int\limits_0^1 (y'(x))^2\, dx + \left(\int\limits_0^1 y(x)\, dx \right)^2 \right). \tag{28}$$

Найдите значение оптимальной константы C_{opt} в этом неравенстве.

Замечание: часто неравенством Пуанкаре называется следующая формулировка, которая незамедлительно следует из (28): Пусть $y \in C^1[0, 1]$ с нулевым средним, т.е. $\int_0^1 y(x)\, dx = 0$. Тогда выполнено неравенство

$$\int\limits_0^l (y(x))^2\, dx \leqslant C \int\limits_0^l (y'(x))^2\, dx.$$

5. **[2]** Предполагая функцию F достаточно гладкой, найдите общий вид функционала $J[y]$, $y \in C^1[0, l]$,

$$J[y] = \int\limits_0^l F(x, y, y')\, dx,$$

множество экстремалей которого совпадает с множеством прямых $\{y = kx + b : \, k, b \in \mathbb{R}\}$.

6. **[1]** Найдите форму однородного тела вращения вокруг оси OZ, имеющее данный объем V и наименьший момент инерции относительно оси OY.

Указание: В задаче требуется лишь найти критические точки этого функционала. Доказывать, что получившиееся тело дает минимальный момент инерции не нужно, но можно за доп. балл (+1 балл).

7. **[2]** Найдите геодезические на параболоиде вращения $2z = x^2 + y^2$.

   Указание: Полезно записать функционал расстояния в подходящих координатах. В задаче требуется лишь найти критические точки этого функционала. Доказывать, что получившиеся кривые дают минимальное расстояние, не нужно.

8. **[2]** Дана выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$ и точки $A, B \in \operatorname{Int}(\Omega)$. Определим следующую функцию пар точек ("кратчайшее расстояние с заходом на границу"):

$$\operatorname{dist}_\Omega(A, B) := \inf_{S \in \partial\Omega} (|AS| + |SB|),$$

   где $|AS|$ — длина отрезка, соединяющего точки A и S. Пусть нижняя грань достигается в точке $S \in \partial\Omega$. Найдите, какому геометрическому условию должна удовлетворять точка $S \in \partial\Omega$? Может ли нижняя грань достигаться в нескольких точках?

9. **[2]** Используя первую вариацию функционала $J[z]$

$$J[z] = \int |\nabla z|^2 \, dx \, dy,$$

   запишите оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в координатах

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \qquad (ds)^2 = a \cdot (du)^2 + 2b \cdot du\, dv + c \cdot (dv)^2$$

   где ds — элемент длины в координатах (x, y), т.е. $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$; а $a = a(u, v)$, $b = b(u, v)$, $c = c(u, v)$ — некоторые функции[1].

Организационные моменты:

- Листочек подразумевает индивидуальное решение.
- Решение задач нужно оформлять письменно с подробным объяснением всех переходов.
- Важно: все решения нужно присылать **единым файлом PDF**. Для удобства стандартизируем название файла: var-N-Surname.pdf, где N — номер группы (1, 2, 3, 4 или 5), Surname — Ваша фамилия. Например, var-2-Osipov.pdf.

[1] Эти функции могут быть легко выражены через функции, задающие обратное отображение $(u, v) \mapsto (x, y)$, но в задаче требуется лишь записать лапласиан, используя a, b и c.